

ITA Számítástechnikai és Automatizálási Kutató Intézet Budapest



MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
SZÁMITÁSTECHNIKAI ÉS AUTOMATIZÁLÁSI KUTATÓ INTÉZETE

MÁTRIXOK SPEKTRÁLFELBONTÁSÁNAK ÉS
SZINGULÁRIS FELBONTÁSÁNAK MÓDSZEREI

Írta:

BOLLA MARIANNA

Tanulmányok 174/1985

A kiadásért felelős:

Dr. VAMOS TIBOR

Fősztályvezető:

Prékopa András

ISBN 963 311 195 1

ISSN 0324 - 2951

85.593 Alfaprint

TARTALOMJEGYZÉK

1. A SZINGULÁRIS FELBONTÁS ÉS A SPEKTRÁLFELBONTÁS	
FOGLMA	5
2. HATVÁNYITERÁCIÓS MODSZEREK	11
a/ Hatványiteráció	11
b/ Inverz hatványiteráció	13
3. A TELJES SAJÁTÉRTÉK-, SAJÁTVEKTORRENDSZERT KÖZVET-	
LENÜL MEGHATÁROZO MODSZEREK	14
a/ A sajátérték elhelyezkedése	14
b/ Elemi mátrixfelbontások	15
c/ Jacobi módszere	17
d/ A QR-transzformáció	21
e/ Az LR-transzformáció	29
4. A MÁTRIX ELŐZETES TRANSZFORMÁCIÓJÁN ALAPULO	
MODSZEREK	34
a/ Valós szimmetrikus mátrixok esete	35
b/ Valós nem-szimmetrikus mátrixok esete	39
5. ÁLTALÁNOS VALÓS MÁTRIXOK SZINGULÁRIS FELBONTÁSA .	45
a/ A QRPS-algoritmus	45
b/ Az SVD-algoritmus	54
c/ A QRPS- és SVD-algoritmus összehasonlítása . .	61
IRODALOMJEGYZÉK	67
FÜGGELEK	



A dolgozat áttekinti és csoportosítja azokat az eljárásokat, amelyek mátrixok spektrálfelbontására és szinguláris felontására ismeretesek. A szinguláris felbontásnak fontos szerepe van adatmátrixok és kovarianciastruktúrák elemzésében (kanonikus korrelációanalízis, faktoranalízis), továbbá mátrixok pszen-do-inverzének meghatározásában.

Az alkalmazás céljának és a mátrix típusának megfelelően a speciális esetektől fogunk haladni általános téglalapmátrixok szinguláris felbontásáig. Speciális esetként négyzetes mátrixok spektrálfelbontására (azaz sajátértékeik és sajátvektoraik meghatározására) kapunk módszereket. A dolgozat konvergenciabizonyításokat is közöl vázlatosan, továbbá kitér a módszerek elvi összehasonlítására és gyakorlati alkalmazhatóságának kérdéseire.

Programmelléklet csak a kevésbé ismert algoritmusokra található. Nem cél a módszerek egzakt numerikus összehasonlítása.

1. A SZINGULÁRIS FELBONTÁS ÉS A SPEKTRÁLFELBONTÁS FOGALMA

Legyen $A: E_n \rightarrow E_m$ lineáris leképezés, ahol E_n az n -dimenziós valós euklideszi tér.

1.1. Definíció: Az E_n tér $\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_n$ és az E_m tér $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_m$ ortonormált bázisait az A leképezés saját bázispárjának nevezzük, ha vannak olyan s_i ($i=1, \dots, \max\{n, m\}$) nem-negatív valós számok, melyekkel

$$(1.1) \quad \langle A \underline{u}_i, A \underline{u}_j \rangle = s_i^2 \delta_{ij} \quad (1 \leq i < j \leq n)$$

és

$$(1.2) \quad \langle A' \underline{v}_i, A' \underline{v}_j \rangle = s_i^2 \delta_{ij} \quad (1 \leq i < j \leq m)$$

teljesül, ahol $'$ a mátrixtranszponálást, $\langle \dots \rangle$ a skaláris szorzást, δ_{ij} pedig a Kronecker-deltát jelenti.

1.2. Definíció: Az (1.1), (1.2) előállításban szereplő s_1, \dots, s_n számokat az A mátrix *szinguláris értékeinek* nevezzük, melyek sorrendjéről feltehető, hogy

$$s_1 \geq s_2 \geq \dots \geq s_n \geq 0.$$

Tetszőleges lineáris leképezésnek van saját bázispárja, a szinguláris értékek pedig egyértelműek. A levezetéseket ld. [12]-ben. Az is megmutatható továbbá, hogy

$$s_1 \geq s_2 \geq \dots \geq s_r > 0 \quad \text{és} \quad s_{r+1} = \dots = s_{\max\{n, m\}} = 0,$$

ahol r az A leképezés rangja. A saját bázispár elemeinek egyértelműségéről a következő mondható:

1.3. Definíció: Az $F \subset E_n$ alteret A -ra nézve *izotróp*-nak nevezzük, ha van olyan s szám, hogy

$$(1.3) \quad \|A \underline{x}\| = s \|\underline{x}\|$$

teljesül minden $\underline{x} \in F$ vektorra. Az A -ra nézve izotróp F alteret *maximálisnak* mondjuk, ha (1.3) csak F elemeire teljesül.

Könnyen látható, hogy az $\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_n$ báziselemek által kifesztett alterek (jelölje ezeket F_1, \dots, F_n) A maximális izotróp alterei lesznek, melyek direkt összege az egész E_n tér, továbbá

$$F_i = F_j \quad (\text{ha } s_i = s_j)$$

és

$$F_i \cap F_j = 0 \quad (\text{ha } s_i \neq s_j).$$

Tehát a diszjunkt izotróp alterek száma legfeljebb $r+1$. Megmutatható, hogy az \underline{u}_i báziselemeknek a megfelelő F_i altereken belüli választása tetszőleges, az F_i alterek azonban egyértelműen meg vannak határozva az s_1, \dots, s_n számok által. Hasonlóan igaz, hogy a \underline{v}_j báziselemek választása is tetszőleges az E_m tér A' leképezésre nézve izotróp G_j ($j=1, \dots, m$) alterein belül,

ahol ezek az alterek is egyértelműek és a diszjunkt alterek száma megegyezik a diszjunkt F_i alterek számával.

Jelölje ugyancsak A az A leképezés mátrixát az E_n ill. E_m tér előre rögzített $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n$ ill. $\underline{f}_1, \dots, \underline{f}_m$ bázisaiban.

1.1. Tétel: (Szinguláris felbontási tétel) Az A $m \times n$ -es valós mátrix előáll

$$(1.4) \quad A = VSU'$$

alakban, ahol V $m \times m$ -es, U $n \times n$ -es ortogonális mátrix, S pedig $m \times n$ -es diagonális mátrix, melynek diagonálisában az

$$s_1 \geq s_2 \geq \dots \geq s_l \geq 0$$

számok állnak, ahol $l = \min\{m, n\}$.

A tétel bizonyítása [12]-ben konstruktív uton történik. Az $A: E_n \rightarrow E_m$ lineáris leképezést tekintve jelölje U ill. V az $\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_n$ ill. $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_m$ saját bázispár elemeit oszloponként tartalmazó ortogonális mátrixokat és legyen s_i az i -edik szinguláris érték ($i=1, \dots, l$). Bebizonyítható, hogy ilyen választás mellett az (1.4) felbontás teljesül és az s_1, \dots, s_l számok egyértelműen meg vannak határozva.

1.4. Definíció: Az A négyzetes mátrixot *egyszerű strukturájúnak* (más szóval normálisnak) nevezzük, ha Jordan-féle kanonikus alakja szigorúan diagonális.

Egy A $n \times n$ -es egyszerű strukturájú mátrix sajátvektorai ortonormált bázist alkotnak, így A előáll

$$(1.5) \quad A = \Lambda X X'$$

alakban, ahol Λ $n \times n$ -es diagonális mátrix, Λ sajátértékeit tartalmazza diagonálisában (nem-növekvő sorrendben), az X $n \times n$ -es ortogonális mátrix oszlopaiban pedig A sajátvektorai állnak a sajátértékek sorrendjének megfelelően.

1.5. Definíció: Az (1.5) felbontást az A egyszerű strukturájú mátrix *spektrálfelbontásának* nevezzük.

(Egyszerű strukturájú mátrixok esetén E_n sokszor a komplex n -dimenziós euklideszi teret jelöli. A sajátértékek, sajátvektorok és spektrálfelbontás definíciója ugyanaz, csupán a sajátértékek nagyságrendi sorrendje az abszolút értékük szerinti rendezést jelenti.)

Egy egyszerű strukturájú mátrix szinguláris értékei a sajátértékek abszolút értékei, szinguláris felbontásának ortonormált mátrixai pedig megegyeznek a mátrix spektrálfelbontásában szereplő ortonormált mátrixszal (az oszlopok előjelétől eltekintve. Ui., ha valamely sajátérték negatív, akkor a megfelelő bal- vagy jobboldali saját báziselem -1 -gyel szorzódik.)

Könnyen látható, hogy az A $m \times n$ -es valós mátrix szinguláris felbontásának V ill. U mátrixai az $A A'$ ill. $A'A$ mátrixok spektrálfelbontásából is nyerhetők, A szinguláris értékei pedig e szimmetrikus, pozitív szemidefinit mátrixok nem-negatív gyökei közül kerülnek ki.

Ha mátrixunk téglalap alakú, vagy nem egyszerű strukturájú, szinguláris felbontásának akkor is van értelme, ehhez azonban nem szükséges az $A'A$ ill. $A A'$ mátrixszorzatok képzése és spektrálfelbontása. Ennél sokkal gyorsabb és hatékonyabb eljárások léteznek, melyek egyszerre adják meg a szinguláris értékeket és a saját báziselemeket.

Egyszerű strukturájú mátrixoknál a szinguláris felbontás a spektrálfelbontásból következik, így itt elegendő a sajátértékek és sajátvektorok meghatározása. Ehhez viszont a legritkább esetben szokták a mátrix karakterisztikus polinomjának gyökeit meghatározni. Egyrészt számítástechnikai szempontból ez 5-nél magasabb dimenzióban nagyon időigényes, másrészt az eredmények még akkor is pontatlanok, ha a sajátértékek elhelyezkedése kedvező. A sajátvektorok meghatározására továbbá meg kellene még oldani egy homogén lineáris egyenletrendszert.

Igy először néhány speciális sajátérték, majd az egész sajátérték-sajátvektorrendszer meghatározásával foglalkozunk, egyszerű strukturájú mátrixok esetében, amikor az eredeti mátrixot vagy közvetlenül vagy először egyszerűbb alakra hozva hasonlósá-

gi transzformációknak vetjük alá. Végül általános valós mátrixok szinguláris felbontásával foglalkozunk.

Itt említjük meg a szinguláris felbontásnak és spektrálfelbontásnak néhány érdekes szélsőértéktulajdonságát, melyeket a gyakorlatban sokszor alkalmaznak.

1.1. Állítás: Legyen $\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_k$ ill. $\underline{y}_1, \dots, \underline{y}_k$ ortonormált vektorrendszer az E_n ill. E_m térben ($k \leq l = \min\{m, n\}$). Jelölje X ill. Y az ezekből, mint oszlopvektorokból alkotott $n \times k$ -as ill. $m \times k$ -as mátrixokat. Akkor

$$(1.6) \quad \sum_{i=n-k+1}^n s_i \leq \text{tr}(Y'AX) \leq \sum_{i=1}^k s_i,$$

(ahol $\text{tr } B = \sum_{i=1}^k b_{ii}$ valamely $k \times k$ -as B mátrix esetén), továbbá a maximumot adó X ill. Y mátrixokban az $\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_k$ ill. $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k$, míg a minimumot adóban az $\underline{u}_{n-k+1}, \dots, \underline{u}_n$ ill. $\underline{v}_{m-k+1}, \dots, \underline{v}_m$ saját báziselemek állnak.

(A bizonyítást ld. [12]-ben).

1.1. Korollárium: $k=1$ esetén alkalmazva az 1.1. állítást, azt kapjuk, hogy tetszőleges $\underline{x} \in E_n$, $\|\underline{x}\|=1$, $\underline{y} \in E_m$, $\|\underline{y}\|=1$ vektorok esetén

$$s_n \leq \underline{y}' A \underline{x} \leq s_1,$$

és a maximum helye éppen $\underline{x} = \underline{u}_1$, $\underline{y} = \underline{v}_1$, míg a minimumé $\underline{x} = \underline{u}_n$ $\underline{y} = \underline{v}_m$.

A szinguláris felbontás következő szélsőértéktulajdonsága az 1.1. állítás speciális esete:

1.2. Állítás:

$$\begin{aligned} s_1 &= \underline{v}_1' A \underline{u}_1 = \max_{\|\underline{x}\|=\|\underline{y}\|=1} \underline{y}' A \underline{x}, \\ &\vdots \\ s_k &= \underline{v}_k' A \underline{u}_k = \max_{\|\underline{x}\|=\|\underline{y}\|=1} \underline{y}' A \underline{x}, \quad k=2, 3, \dots, l \quad (l = \min\{m, n\}). \\ &\quad \|\underline{x}\| = \|\underline{y}\| = 1, \\ &\quad \underline{x}' \underline{x}_i = \underline{y}' \underline{y}_i = 0, \quad (i=1, 2, \dots, k-1) \end{aligned}$$

1.6. Definíció: Ha A $n \times n$ -es, valós, egyszerű strukturájú mátrix, az $\underline{x} \in E_n$, $\underline{x} \neq \underline{0}$ vektorhoz tartozó *Raleigh-hányados* alatt az

$$R(\underline{x}) = \frac{\underline{x}' A \underline{x}}{\underline{x}' \underline{x}}$$

számot értjük.

A következő állítás az 1.2. állítás speciális esete:

1.3. Állítás: Ha az A $n \times n$ -es, valós, egyszerű strukturájú mátrix sajátértékeire fennáll a

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$$

reláció, és $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \dots, \underline{x}_n$ a hozzájuk tartozó sajátvektorok, akkor

$$\lambda_1 = \max_{\substack{\underline{x} \neq \underline{0}}} R(\underline{x})$$

és a maximum helye éppen $c_1 \underline{x}_1$, ahol c_1 tetszőleges valós szám. Továbbá

$$\lambda_k = \max_{\substack{\underline{x}' \underline{x}_i = 0 \\ \underline{x} \neq \underline{0}}} R(\underline{x}), \quad (k=2, \dots, n), \quad (i=1, \dots, k-1)$$

és a maximum helye $c_k \underline{x}_k$, ahol c_k tetszőleges valós szám.

Ilyen módon az 1.2. és 1.3. állítás lehetőséget adna a szinguláris értékek és saját bázis elemek, ill. sajátértékek és sajátvektorok meghatározására egy szekvenciális szélsőértékfeladat megoldásával. A fenti kvadratikusan szélsőértékfeladatok megoldása azonban elég nehézkes. Legfeljebb csak a szélsőértékek meghatározására használjuk ezeket az összefüggéseket, a szélsőérték helyének megkeresése velük hosszadalmas. Így az 1.2., 1.3. állítások jelentősége elsősorban az alkalmazásokban rejlik. Egyes területeken (pl. kvantumfizika) azonban szokásos a sajátértékek Raleigh-hányadossal való meghatározása.

2. HATVÁNYITERÁCIÓS MÓDSZEREK

Az ebben a részben ismertetésre kerülő módszerek egyszerű strukturájú mátrixokra alkalmazhatók. Használatuk akkor célravezető, ha csak bizonyos sajátértékekre vagyunk kíváncsiak. A módszerek ismételt, váltott alkalmazásával ugyan az összes sajátérték meghatározható lenne, azonban ez nagyon időigényes.

Legyen A $n \times n$ -es egyszerű strukturájú mátrix. Ekkor A előáll

$$(2.1) \quad A = \sum_{i=1}^n \lambda_i \underline{u}_i \underline{u}_i'$$

alakban, ahol a λ_i számok A sajátértékei nem-növekvő sorrendben, a megfelelő \underline{u}_i vektorok pedig A sajátvektorai (melyek, mivel A egyszerű strukturájú, ortonormált bázist alkotnak az E_n térben).

a/ HATVÁNYITERÁCIÓ

Tegyük fel, hogy az A mátrix legnagyobb sajátértéke l -szeres ($l < n$), azaz A sajátértékeire igaz a

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_l > \lambda_{l+1} \geq \lambda_{l+2} \geq \dots \geq \lambda_n$$

reláció. Legyen $\underline{x}_0 \in E_n$, $\|\underline{x}_0\| = 1$ tetszőleges olyan kezdeti vektor, mely nem merőleges az $\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_l$ sajátvektorok által kifesztett lineáris altérre, azaz

$$(2.2) \quad \underline{x} = \sum_{i=1}^l \alpha_i \underline{u}_i \neq \underline{0}, \quad \text{ahol} \quad \alpha_i = \underline{x}_0' \underline{u}_i \quad (i=1, \dots, l).$$

Képezzük a következő sorozatot:

$$\underline{x}_1 = A \underline{x}_0, \dots, \underline{x}_k = A \underline{x}_{k-1} = A^k \underline{x}_0, \dots$$

2.1. Tétel: A fenti feltételek mellett

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\underline{x}_k}{\|\underline{x}_k\|} = \frac{\underline{x}}{\|\underline{x}\|},$$

ahol tehát \underline{x} nem más, mint \underline{x}_0 -nak az első l sajátvektor által kifeszített lineáris altérbe eső vetülete, ami (2.2) miatt nem a zérus vektor. ($\|\cdot\|$ hacsak mást nem irnak, az euklideszi normát jelöli.)

Bizonyítás: Mivel $\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_n$ ortonormált sajátvektorrendszer, a (2.1) összefüggés miatt:

$$\begin{aligned} \underline{x}_0 &= \sum_{i=1}^n \alpha_i \underline{u}_i, \\ \underline{x}_1 &= \sum_{i=1}^n \alpha_i A \underline{u}_i = \sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_i \underline{u}_i, \\ &\vdots \\ \underline{x}_k &= \sum_{i=1}^n \alpha_i A^k \underline{u}_i = \sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_i^k \underline{u}_i. \end{aligned}$$

és így

$$(2.3) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\underline{x}_k}{\lambda_1^k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^l \alpha_i \underline{u}_i + \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=l+1}^n \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1} \right)^k \underline{u}_i = \underline{x},$$

mivel a sajátértékekere tett feltételek miatt a második tag a zérus vektorhoz tart, az első tag pedig \underline{x} -szel egyenlő. Hasonlóan

$$(2.4) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\|\underline{x}_k\|}{|\lambda_1|^k} = \|\underline{x}\|,$$

amiből az állítás következik.

A 2.1. tétel egyben módszert is ad a legnagyobb (esetleg többszörös) sajátvektor meghatározására. Ugyanis képezzük az $\underline{x}_0, \underline{x}_1, \dots, \underline{x}_k, \dots$ sorozatot, ahol \underline{x}_0 a (2.2) feltételnek eleget tevő tetszőleges kezdeti vektor. Akkor a keresett normált sajátvektor (ha λ_1 többszörös, akkor a neki megfelelő sajátaltérben

levő valamely normált vektor) jó közelítése elég nagy k -ra az $\frac{x_k}{\|x_k\|}$ vektor. A λ_1 sajátérték abszolútértékére a (2.4) összefüggés alapján:

$$|\lambda_1| = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\|x_k\|}{\|x_{k-1}\|},$$

a sajátérték előjele a hozzá tartozó sajátvektor alapján már könnyen eldönthető.

Ezek alapján adódik a következő állítás is:

2.1. Állítás: Az A $n \times n$ -es egyszerű strukturájú mátrix legnagyobb abszolútértékű sajátértékére

$$|\lambda_1| = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\|A\|^k}$$

ahol $\|\cdot\|$ a maximum-normát jelöli.

b/ INVERZ HATVÁNYITERÁCIÓ

Ez is lényegében egy hatványiteráció, amely az A mátrix valamely többszörös sajátértékét határozza meg, ha ismert annak egy olyan közelítő értéke, amely nem egyezik meg vele pontosan, de közelebb van hozzá, mint a többi sajátértékhez. Mindez formulákkal:

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_k > \lambda_{k+1} = \lambda_{k+2} = \dots = \lambda_{k+l} > \lambda_{k+l+1} \geq \dots \geq \lambda_n$$

($l < n-2$)

az A mátrix sajátértékei és a $\lambda_{k+1} = \dots = \lambda_{k+l} = \lambda$ sajátértékre a $\tilde{\lambda}$ közelítő érték olyan, hogy

$$|\tilde{\lambda} - \lambda| < |\tilde{\lambda} - \lambda_i|, \quad \lambda_i \neq \lambda, \text{ továbbá } \tilde{\lambda} \neq \lambda.$$

A feltételek miatt a $\tilde{\lambda}I - A$ mátrix nonszinguláris és $(\tilde{\lambda}I - A)^{-1}$ legnagyobb sajátértéke $\frac{1}{\tilde{\lambda} - \lambda}$, ami l -szeres sajátérték. (Itt I

az $n \times n$ -es identitás mátrix. Így, ha az \underline{x}_0 kezdeti vektor olyan, hogy $\|\underline{x}_0\| = 1$ és \underline{x}_0 nem merőleges az $\underline{u}_{k+1}, \dots, \underline{u}_{k+l}$ sajátvektorok által kifeszített altérre, akkor ebből kiindulva a $(\lambda I - A)^{-1}$ mátrixon végrehajtott hatványiterációval, az a/-ban leírt módon kapunk egy, a többszörös sajátértékhez tartozó sajátaltérben levő egyetlen sajátvektort, és szintén a/ szerint magát a többszörös sajátértéket is approximáljuk.

A függelék a. részében található a hatványiteráció algoritmusának FORTRAN programja. Ez megfelelő input mátrix választásával inverz hatványiterációra is használható.

3. A TELJES SAJÁTÉRTÉK-, SAJÁTVEKTORRENDSZERT KÖZVETLENÜL MEGHATÁROZÓ MÓDSZEREK

Ebben a fejezetben is négyzetes mátrixok spektrálfelbontásával foglalkozunk. (A tételeket itt néha általánosan, komplex elemű mátrixokra mondjuk ki.) A mátrixon olyan hasonlósági transzformációkat hajtunk végre, hogy a transzformált mátrixsorozat a sajátértékeket tartalmazó diagonális mátrixhoz konvergál. Szimmetrikus mátrixokra Jacobi módszerét, nem-szimmetrikusakra pedig a QR és LR algoritmusokat fogjuk ismertetni.

a/ A SAJÁTÉRTÉKEK ELHELYEZKEDÉSE

Itt csak közöljük a következő állításokat (a részletes bizonyítást ld. [11]-ben), melyek lényegesek lesznek a sajátértékek behatárolása szempontjából.

3.1. Definíció: Az A $n \times n$ -es komplex elemű mátrix *spektrálrádiusza* a

$$\delta(A) = \max_k |\lambda_k|$$

szám, ahol $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ az A mátrix sajátértékei.

3.1. Állítás: Minden $n \times n$ -es, komplex A mátrixra

$$\delta(A) \leq \|A\|,$$

bármely természetes normát használunk is.

A sajátértékek tehát benne vannak az origó középpontu, $\|A\|$ sugaru körben. Ennél azonban több is igaz:

3.1. Tétel: (lokalizációs tétel) A komplex elemű

$A = (a_{ij})_{i=1, j=1}^n$ mátrix sajátértékei a

$$|z - a_{ii}| \leq R_i, \quad R_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

által definiált *Gersgorin-körök* egyesített halmazában helyezkednek el.

b/ ELEMI MÁTRIXFELBONTÁSOK

Itt szeretnénk néhány tételt és definíciót bevezetni elemi mátrixfelbontásokra, melyeket a következőkben gyakran fogunk használni:

3.2. Tétel: Minden komplex A mátrix előáll

$$A = Q R$$

alakban, ahol A $m \times n$ -es mátrix, Q $m \times m$ -es unitér mátrix, R pedig $m \times n$ -es felső háromszög mátrix (azaz a bal felső sarokból kiinduló diagonálisa alatt zérus elemek állnak).

A bizonyítás pl. [2]-ben található. (A bizonyításban adott konstrukció Q oszlopait A oszlopaiból Schmidt-ortogonalizációval állítja elő előre eldöntött sorrendben.)

3.2. Definíció: A fenti felbontást az A $m \times n$ -es mátrix QR -felbontásának nevezzük.

3.3. Tétel: Legyen A tetszőleges $n \times n$ -es mátrix. Jelölje A_k az első k sor és oszlop által alkotott $k \times k$ -as mátrixot. Ha A_1, A_2, \dots, A_n nem-szinguláris, akkor

a/ A egyértelműen előáll

$$A = C D B$$

alakban, ahol C alsó-, B felső háromszög mátrix, diagonálisokban 1-esek állnak, D pedig diagonális.

b/ Ha C_k, D_k, B_k jelöli a megfelelő mátrixok első k sora és oszlopa által alkotott $k \times k$ -as mátrixokat, akkor

$$A_k = C_k D_k B_k \quad (k=1, 2, \dots, n).$$

3.3. Definíció: Az A $n \times n$ -es mátrix - melyre teljesülnek a 3.3. tétel feltételei - LU -felbontásának nevezzük egy alsó- és felső háromszög tényező szorzataként való előállítását, ahol L diagonálisában 1-esek állnak.

A 3.3. tétel feltételeinek teljesülése esetén a LU -felbontás $L=C$ és $U=D B$ választással valóban létezik és egyértelmű.

3.2. Állítás: Ha A Hermitikus, pozitív szemidefinit mátrix, akkor előáll $L L'$ alakban, ahol L alsó háromszög mátrix diagonálisában nem-negatív számokkal. Az előállítás egyértelmű. Ugyan- is a 3.3. tételbeli D mátrix felbontható $D_1 D_2$ alakban, úgy hogy $L=C D_1$ és $L'=D_2 B$.

c/ JACOBI MÓDSZERE (1946)

Legyen A valós, szimmetrikus mátrix $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$ sajátértékekkel. Képezzük a következő sorozatot:

$$A^{(0)} = A, \quad A^{(k)} = R^{(k)} A^{(k-1)} R^{(k)}, \quad (k=1, 2, \dots),$$

ahol $R^{(k)}$ a következő síkbeli forgatás mátrixa:

Jelölje az $A^{(k-1)}$ mátrix legnagyobb abszolútértékű nem-diagonális elemét $a_{ij}^{(k-1)}$, és válasszuk az $R^{(k)}$ mátrixban a forgatás szögét úgy, hogy $a_{ij}^{(k)} = 0$ legyen az $R^{(k)}$ -val való hasonlósági transzformáció után. Könnyen látható, hogy az $R^{(k)}$ mátrix választása ehhez a következő:

$$R^{(k)} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & \cos \vartheta & \sin \vartheta & & \\ & & & -\sin \vartheta & \cos \vartheta & & \\ & & & & & 1 & \\ & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} i. \\ \\ \\ j. \\ \\ \\ \end{matrix}$$

ahol

$$(3.1) \quad \operatorname{tg} 2\vartheta = \frac{2 a_{ij}^{(k-1)}}{a_{ii}^{(k-1)} - a_{jj}^{(k-1)}},$$

és a ϑ szög a $|\vartheta| \leq \frac{1}{4}\pi$ tartományban van. $a_{ii}^{(k-1)} = a_{jj}^{(k-1)}$ esetén

$\vartheta = \pm \frac{1}{4}\pi$ értéket választunk $a_{ij}^{(k-1)}$ előjelének megfelelően.

3.4. Tétel: A fenti feltételek mellett a transzformált sorozatra igaz, hogy

$$\lim_{k \rightarrow \infty} A^{(k)} = \Lambda,$$

ahol Λ diagonális mátrix, diagonálisában a $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ számokkal.

Bizonyítás: $R^{(k)}$ választása miatt ($k=1, 2, \dots$)

$$a_{ip}^{(k)^2} + a_{jp}^{(k)^2} = a_{ip}^{(k-1)^2} + a_{jp}^{(k-1)^2}, \quad (p \neq i, j).$$

Mivel $a_{ij}^{(k)} = 0$ (a választása miatt) és az $R^{(k)}$ mátrixszal végrehajtott hasonlósági transzformáció csak az i -edik és j -edik sort és oszlopot változtatja:

$$(3.2) \quad \sum_{p=1, p \neq q}^n \sum_{q=1}^n a_{pq}^{(k)^2} = \sum_{p=1, p \neq q}^n \sum_{q=1}^n a_{pq}^{(k-1)^2} - 2a_{ij}^{(k-1)}.$$

Mivel $a_{ij}^{(k-1)}$ a legnagyobb abszolútértékű nem-diagonális eleme az $A^{(k-1)}$ mátrixnak,

$$a_{ij}^{(k-1)^2} \geq \frac{1}{n(n-1)} \sum_{p=1}^n \sum_{q=1, p \neq q}^n a_{pq}^2.$$

Igy a (3.2) összefüggésből

$$(3.3) \quad \sum_{p=1, p \neq q}^n \sum_{q=1}^n a_{pq}^{(k)^2} \leq \left(1 - \frac{2}{n-1}\right) \sum_{p=1, p \neq q}^n \sum_{q=1}^n a_{pq}^{(k-1)^2}.$$

Ezt alkalmazva minden egyes iterációs lépésben:

$$(3.4) \quad \sum_{p=1}^n \sum_{\substack{q=1 \\ p \neq q}}^n a_{pq}^{(k)^2} \leq \left(1 - \frac{2}{n-1}\right)^k \sum_{p=1}^n \sum_{q=1}^n a_{pq}^2$$

Mivel a jobboldal zérushoz tart ($k \rightarrow \infty$), az $A^{(k)}$ sorozat diagonális mátrixhoz konvergál. Már csak azt kell belátni, hogy az $a_{pp}^{(k)}$ diagonális elemek a megfelelő λ_p sajátértékekhez tartanak. Ugyanis $(a_{pq}^{(k)})_{p=1, q=1}^n = E^{(k)}$ jelöléssel

$$(3.5) \quad A^{(k)} = \text{diag}(a_{pp}^{(k)}) + E^{(k)},$$

ahol tehát $\lim_{k \rightarrow \infty} E^{(k)} = 0$.

Tegyük fel, hogy a k index már akkora, hogy $\|E^{(k)}\| < \epsilon$, ahol az ϵ pozitív számot később fogjuk megválasztani. Akkor a (3.5) összefüggés miatt, ha az $a_{pq}^{(k)}$ elemek ($q=1, 2, \dots, n$) nagyság szerint csökkenő sorrendbe vannak rendezve, akkor $a_{pp}^{(k)}$ egy λ_p körüli, 2ϵ sugaru körben fekszik. Megmutatjuk, hogy egy K küszöbérték feletti indexekre az $a_{pp}^{(k)}$ elemek benne is maradnak a megfelelő körben.

Először tegyük fel, hogy a λ_p számok ($p=1, 2, \dots, n$) különbözőek. Ekkor válasszuk ϵ -t úgy, hogy

$$(3.6) \quad 0.4\epsilon = \min_{p \neq q} |\lambda_p - \lambda_q|$$

Válasszuk a K küszöböt úgy, hogy $\|E^{(k)}\| < \epsilon$ teljesüljön. A (3.3) összefüggés miatt $k > K$ indexekre is $\|E^{(k)}\| < \epsilon$. A (3.6) összefüggés miatt viszont az intervallumok diszjunktak, így pontosan egy $a_{qq}^{(k)}$ ($q=1, 2, \dots, n$) elem található mindegyik ilyen intervallumban. Tegyük fel, hogy a λ_p számokat úgy indexeztük, hogy épp $a_{pp}^{(k)}$ van a λ_p körüli ϵ sugaru körben. Megmutatjuk, hogy ott is marad a $k > K$ indexekre.

Ui. tegyük fel, hogy rögzített ilyen k index esetén a $(k+1)$ -edik forgatás az (i, j) sikban történik. Így a diagonálisban csak az (i, i) és (j, j) pozícióbeli elemek változnak. Ezért az $a_{ii}^{(k+1)}$ és $a_{jj}^{(k+1)}$ elemek benne maradnak a λ_i és λ_j

körüli intervallumokban. Már csak azt kell megmutatni, hogy ezek nem cserélődhetnek fel. Ui.

$$\begin{aligned} a_{jj}^{(k+1)} - \lambda_i &= a_{ii}^{(k)} \sin^2 \vartheta - 2a_{ij}^{(k)} \cos \vartheta \sin \vartheta + a_{jj}^{(k)} \cos^2 \vartheta - \lambda_i \\ &= (a_{ii}^{(k)} - \lambda_i) \sin^2 \vartheta + (a_{jj}^{(k)} - \lambda_j + \lambda_j - \lambda_i) \cos^2 \vartheta - 2a_{ij}^{(k)} \cos \vartheta \sin \vartheta, \end{aligned}$$

amiből

$$\begin{aligned} |a_{jj}^{(k+1)} - \lambda_i| &\geq |\lambda_j - \lambda_i| \cos^2 \vartheta - |a_{ii}^{(k)} - \lambda_i| \sin^2 \vartheta - |a_{jj}^{(k)} - \lambda_i| \cos^2 \vartheta - |a_{ij}^{(k)}| \\ &\geq 4\varepsilon \cos^2 \vartheta - \varepsilon \sin^2 \vartheta - \varepsilon \cos^2 \vartheta - \varepsilon = 2\varepsilon \cos 2\vartheta. \end{aligned}$$

$$\text{Másképp } |\operatorname{tg} 2\vartheta| = \left| \frac{2 a_{ij}^{(k)}}{a_{ii}^{(k)} - a_{jj}^{(k)}} \right| \leq \frac{2\varepsilon}{2\varepsilon} = 1.$$

Igy, ha a ϑ szöget (3.1) szerint választjuk,

$$|a_{jj}^{(k+1)} - \lambda_i| \geq \sqrt{2} \varepsilon.$$

ami miatt $a_{jj}^{(k+1)}$ nincsen benne a λ_i körüli ε sugaru körben, így csak a λ_j körüli körben lehet.

Többszörös sajátértékek esetén ε -t úgy definiáljuk, hogy a (3.6) összefüggésben csak a különböző sajátértékekre minimalizálunk. Kissé hosszadalmas, de hasonlóan megmutatható, hogy ha λ_p l -szeres sajátérték, akkor pontosan l db. diagonális elem található az $A^{(k)}$ mátrixnak a λ_p körüli ε sugaru körben, egy alkalmasan választott K küszöbnél nagyobb indexekre.

Mivel a legnagyobb abszolútértékű nem-diagonális elem megkeresése minden lépésben időigényes, célszerű egyszerűen valamilyen előre rögzített sorrendben végigmenni $A^{(k)}$ elemein (pl. a diagonális alatti elemeken oszloponként, azaz $\frac{n(n-1)}{2}$ forgatást végezni minden iterációban. Ezt nevezzük *ciklikus Jacobi módszernek*. Henrici (1958) bebizonyította, hogy a szögtartományok megfelelő korlátozása mellett ez a módszer is konvergens. Egy másik változat az ún. *küszöb Jacobi módszer*, ahol a szim-

metrikus $A^{(k)}$ mátrixban egy előírt $\delta^{(k)} > 0$ küszöbnél nagyobb abszolútértékű elemeket redukálunk zérussá. Ez az eljárás is konvergál.

A küszöb Jacobi módszer algoritmusára a függelék b. részében FORTRAN program található. A konvergencia sebességére vonatkozóan a (3.4) összefüggés alapján tájékozódhatunk:

$N = \frac{1}{2} (n^2 - n)$ és $r = \left[\frac{k}{N} \right] + 1$ jelölésekkel (ahol $[.]$ az egész részt jelöli):

$$\|E^{(rN)}\|^2 \leq \left(1 - \frac{1}{N}\right)^{rN} \|E^{(0)}\|^2 < e^{-r} \|E^{(0)}\|^2.$$

Igy

$$\|E^{(rN)}\|^2 \leq \varepsilon^2 \|E^{(0)}\|^2, \text{ ha } r > 2 \ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right),$$

amiből $\varepsilon = 2^{-t}$ választással $r > k \ln 2^t \sim 1.39 t$ értéket kapunk.

Megjegyezzük, hogy a Jacobi módszer átvihető komplex Hermitikus mátrixokra is, csak ott komplex síkbeli forgatásokat kell alkalmazni.

d/ A QR-TRANSZFORMÁCIÓ (Francis, 1961)

A 3.2. tétel ad ötletet a következő iterációhoz: Legyen A tetszőleges $n \times n$ -es mátrix. A előáll QR alakban, ahol Q $n \times n$ -es unitér, R pedig $n \times n$ -es felső háromszög mátrix. Tekintsük az A mátrix Q mátrixszal való hasonlósági transzformáltját (ez létezik, hisz a Q mátrix - mivel unitér - nem-szinguláris):

$$Q^{-1} A Q = Q^{-1} Q R Q = R Q,$$

ami nem más, mint a Q és az R faktorok fordított sorrendben vett szorzata. Képezzük a következő sorozatot:

$$A_0 = A, \quad Q_0 = Q, \quad R_0 = R,$$

és ha

$$A_{k-1} = Q_{k-1} R_{k-1}$$

QR-felbontás, akkor legyen

$$A_k = R_{k-1} Q_{k-1} \quad (k=1, 2, \dots).$$

3.4. Definíció: Az így képzett A_k sorozatot az A mátrix QR-transzformációjának nevezzük.

Vezessük be a következő jelöléseket:

$$(3.7) \quad P_k = Q_0 Q_1 \dots Q_k, \quad U_k = R_k R_{k-1} \dots R_1 R_0, \quad (k=1, 2, \dots).$$

Ezekkel könnyen látható, hogy

$$(3.8) \quad A^k = P_k U_k,$$

és mivel P_k unitér, U_k pedig felső háromszög mátrix, a (3.8) összefüggés adja az A^k mátrix QR-felbontását.

3.5. Tétel: Ha az A mátrix egyszerű strukturájú, akkor az A_k sorozat olyan diagonális mátrixhoz konvergál, mely A sajátértékeit tartalmazza diagonálisában.

Bizonyítás: Először belátjuk, hogy a P_k sorozat konvergens. Három esetet különböztetünk meg:

i/ Először tegyük fel, hogy az A mátrix sajátértékeire

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| > \dots > |\lambda_n|.$$

Λ -val jelölve a $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ számokat tartalmazó diagonális mátrixot, A előáll $X\Lambda X^{-1}$ alakban, ahol az X mátrix unitér, így QR-felbontása $X I$ (ahol I az $n \times n$ -es identitás).

Tegyük fel, hogy az X^{-1} mátrixnak létezik LU-felbontása, azaz teljesülnek rá a 3.3. tétel feltételei. Ekkor X^{-1} előáll $L U$ alakban, ahol tehát L alsó háromszög mátrix, diagonálisában 1-esekkel, U pedig felső háromszög alakú. Ezekkel a jelölésekkel

$$(3.9) \quad A^k = X \Lambda^k X^{-1} = X \Lambda^k L U = X (\Lambda^k L \Lambda^{-k}) \Lambda^k U,$$

ahol $\Lambda^k L \Lambda^{-k}$ alsó háromszög mátrix, melynek elemei:

$$(\Lambda^k L \Lambda^{-k})_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{ha } i < j \\ 1, & \text{ha } i = j \\ l_{ij} \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_j} \right)^k \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty), & \text{ha } i > j. \end{cases}$$

Igy

$$(3.10) \quad \Lambda^k L \Lambda^{-k} = I + E_k, \quad \text{ahol} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} E_k = 0.$$

Ezért a (3.9) összefüggést tovább alakíthatjuk:

$$(3.11) \quad \Lambda^k = X(I + E_k) \Lambda^k U.$$

Most felbontjuk az $(I + E_k)$ mátrixot egy \tilde{Q}_k unitér és egy \tilde{R}_k felső háromszög mátrix szorzatára, ahol \tilde{R}_k diagonálisában pozitív elemek állnak (ez \tilde{Q}_k oszlopainak megfelelő előjelzésével elérhető). A Schmidt-ortogonalizáció folytonossága miatt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{Q}_k = I, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{R}_k = I,$$

tehát az A^k mátrix QR-felbontása

$$(3.12) \quad A^k = (X \tilde{Q}_k) (\tilde{R}_k \Lambda^k U),$$

ahol tehát az unitér tényező - ami a (3.8) összefüggés szerint P_k - a Q mátrixhoz konvergál, úgy értve a konvergenciát, hogy Q oszlopai esetleg egységnyi abszolútértékű komplex számokkal szorozódhatnak. Ui. vezessük be a D_1 , D_2 diagonális mátrixokat, melyekre

$$(3.13) \quad \Lambda = |\Lambda| D_1, \quad U = D_2 (D_2^{-1} U),$$

ahol D_1 és D_2 diagonálisában egységnyi abszolútértékű komplex számok állnak úgy, hogy $|\Lambda|$ és $D_2^{-1} U$ diagonális elemei pozitívak. Ezekkel a (3.12) összefüggés alapján

$$A^k = X \tilde{Q}_k D_2 D_1^k [(D_2 D_1^k)^{-1} \tilde{R}_k (D_2 D_1^k) |\Lambda|^k (D_2^{-1} U)],$$

ahol a szögletes zárójelben levő felső háromszög mátrix diagonálisában már pozitív elemek állnak, ezért

$$(3.14) \quad P_k = X \tilde{Q}_k D_2 D_1^k.$$

Igy a konvergencia szigorú értelemben nem teljesül, csak ha X oszlopainak egységnyi abszolútértékű komplex faktorokkal való szorzásától eltekintünk.

ii/ Az X^{-1} mátrix LU-felbontásához fel kellett tenni, hogy a 3.3. tétel feltételei teljesülnek rá. Ha ezek nem teljesülnek, akkor is létezik olyan P permutációmátrix, hogy a $P X^{-1}$ mátrixnak már létezik LU-felbontása. (Ui. egy ún. pivotáló eljárást alkalmazunk: az r -edik lépésben ($r=1, 2, \dots, n$) keressük az (r, r) , $(r+1, r)$, \dots , (n, r) pozíciókban az első nem-zéró elemet. Mivel X^{-1} nem-szinguláris, ilyen mindig létezik, tegyük fel, hogy az (r, r) pozícióban. Akkor X^{-1} sorait $r, r+1, \dots, r-1, r+1, \dots, n$ sorrendbe rendezzük át.)

$$(3.15) \quad P X^{-1} = L U$$

esetén az L mátrix diagonálisánál zérusok állnak a P permutációmátrix által meghatározott helyeken. Ezekkel A^k felbontása

$$(3.16) \quad A^k = X \Lambda^k X^{-1} = X \Lambda^k P^* L U = X P^* (P \Lambda^k P^*) L U,$$

ahol $P \Lambda^k P^*$ diagonális mátrix a λ_i^k számok P szerinti permutációját tartalmazza diagonálisában, míg az $X P^*$ mátrix az X mátrix oszlopainak P szerinti permutációja. Jelölje

$$(3.17) \quad X P^* = Q R, \quad P \Lambda^k P^* = D^k,$$

ezekkel

$$A^k = Q R D^k L U = Q R (D^k L D^{-k}) D^k U.$$

Ha D diagonális elemeit $\lambda_{i_1}, \lambda_{i_2}, \dots, \lambda_{i_n}$ jelöli, akkor

$$(D^k L D^{-k})_{pq} = \begin{cases} 0, & \text{ha } p < q \text{ (mert } D^k L D^{-k} \text{ alsó három-} \\ & \text{szög mátrix,)} \\ 1, & \text{ha } p = q, \\ \frac{\lambda_{i_p}^k}{\lambda_{i_q}^k} l_{pq}, & \text{ha } p > q. \end{cases}$$

De mivel $\lambda_{i_p} < \lambda_{i_q}$ ($i_p < i_q$) esetén $l_{pq} = 0$, így

$$D^k L D^{-k} = I + E_k, \quad \text{ahol} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} E_k = 0.$$

Igy $\lim_{k \rightarrow \infty} P_k = Q$ az i/ részben tárgyalt értelemben, ahol (3.17) miatt Q nem más, mint az X oszlopainak megfelelő átrendezésével nyert mátrix.

iii/ Most tegyük fel, hogy az A mátrixnak vannak egyenlő abszolútértékű sajátértékei. Mivel azonban elemi osztói lineárisak (hisz egyszerű strukturájú mátrixról van szó), a $P X^{-1}$ mátrixnak létezik LU-felbontása megfelelően választott P permutációmátrixszal. Feltehető, hogy $P = I$, ellenkező esetben itt is a ii/ rész trükkjei alkalmazhatók. Tegyük fel, hogy

$$|\lambda_r| = |\lambda_{r+1}| = \dots = |\lambda_t|,$$

és a többi sajátérték abszolútértékben különböző (ui. ez az összes többszörös sajátértékre végigcsinálható). Így az

$$A^k = X \Lambda^k L U = X (\Lambda^k L \Lambda^{-k}) \Lambda^k U$$

előállításban

$$(\Lambda^k L \Lambda^{-k})_{ij} = \begin{cases} 0, & i < j \\ 1, & i = j, \\ (\frac{\lambda_i}{\lambda_j})^k l_{ij} = l_{ij}, & t \geq i > j \geq r, \\ (\frac{\lambda_i}{\lambda_j})^k l_{ij} \rightarrow 0 & (k \rightarrow \infty), \text{ különben.} \end{cases}$$

Jelölje \tilde{L} azt a mátrixot, amelyre

$$\tilde{L}_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ l_{ij}, & t \geq i > j \geq r, \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$

Ezzel

$$\Lambda^k L \Lambda^{-k} = \tilde{L} + E_k, \text{ ahol } \lim_{k \rightarrow \infty} E_k = 0.$$

Az $X \tilde{L} = Q R$ felbontást bevezetve

$$\begin{aligned} A^k &= Q R (I + \tilde{L}^{-1} E_k) \Lambda^k U = Q (I + R \tilde{L}^{-1} E_k R^{-1}) R \Lambda^k U \\ &= Q (I + F_k) R \Lambda^k U, \text{ ahol } \lim_{k \rightarrow \infty} F_k = 0. \end{aligned}$$

Legyen az $I + F_k$ mátrix QR-felbontása $\tilde{Q}_k \tilde{R}_k$, ahol \tilde{Q}_k unitér, \tilde{R}_k felső háromszög mátrix diagonálisában pozitív elemekkel, továbbá a QR-felbontás folytonossága miatt $\lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{Q}_k = I$, $\lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{R}_k = I$.

Igy $\lim_{k \rightarrow \infty} P_k = Q$. De a Q mátrixot $X \tilde{L}$ Schmidt-ortogonalizációjával nyertük, ahol $X \tilde{L}$ oszlopai az A mátrix lineárisan független sajátvektorai, hisz az X mátrix $r, r+1, \dots, t$ -edik oszlopait saját lineáris kombinációjukkal helyettesítettük.

Ha az egyenlő abszolútértékű sajátértékek nem egyenlőek, akkor az \tilde{L} mátrix nem-zérus diagonális alatti elemei nem konstansok, hanem a $\lambda_i = |\lambda_i| e^{i\theta_i}$ jelölést bevezetve (az imaginárius egység):

$$\tilde{l}_{ij} = l_{ij} e^{k(\vartheta_i - \vartheta_j)},$$

így $X \bar{L}$ oszlopai minden k -ra az X mátrix $r, r+1, \dots, t$ -edik oszlopának más-más lineáris kombinációjából állnak. Így az r -edik és t -edik oszlop közti oszlopokra a konvergencia csak az ezek által kifeszített altérben teljesül.

Most nézzük meg, mit tudunk ebből mondani az A_k sorozat konvergenciájára? Az

$$(3.18) \quad A_{k+1} = P_k^* A P_k$$

összefüggés miatt, ha a P_k sorozat konvergens, akkor az A_k sorozat is konvergens, mégpedig ha A felbontása $X \Lambda X^{-1}$ és

$$\lim_{k \rightarrow \infty} P_k = X, \text{ akkor } \lim_{k \rightarrow \infty} A_k = \Lambda. \quad \lim_{k \rightarrow \infty} P_k = X \text{ szigorú értelemben}$$

azonban csak akkor teljesül, ha az A mátrix sajátértékei pozitívak és különbözőek. Ellenkező esetben csak az tudjuk bizonyítani, hogy $\lim_{k \rightarrow \infty} P_k = Q D$, ahol D unitér diagonálmátrix és a Q

mátrix az X mátrix oszlopainak valamely permutációjából áll, illetve többszörös sajátértékek esetén a megfelelő helyeken X oszlopainak lineáris kombinációit tartalmazza (melyek választhatók úgy, hogy egymástól azért lineárisan függetlenek legyenek). Mindenképpen ez a Q is az A mátrix egy saját bázisát tartalmazza, így (3.18)-ból

$$\lim_{k \rightarrow \infty} A_{k+1} = \lim_{k \rightarrow \infty} P_k^* A P_k = D^* Q^* Q \bar{\Lambda} Q^{-1} Q D = D \bar{\Lambda} D,$$

ahol $\bar{\cdot}$ a diagonálisban való permutálást jelenti.

Azaz A_k egy diagonálmátrixhoz konvergál, ami A sajátértékeit tartalmazza (nem feltétlen csökkenő sorrendben) egységnyi abszolútértékű komplex faktortól eltekintve. Ha A valós, a háttérérték mindig kiadja a sajátértékek egy permutációját. Ezzel a tétel bizonyítását befejeztük.

A bizonyításból az is kitűnik, hogy a konvergencia sebessége az abszolútértékben szomszédos sajátértékek hányadosától függ, elég gyors, ha a sajátértékek viszonylag egyenletesen

oszlának el. Ez a feltétel *eltolásos QR-transzformációval* javítható. A képzett sorozat ekkor:

$$A_0 = A, \quad Q_0 = Q, \quad R_0 = R, \quad s_0 = 0,$$

ahol tehát a Q R mátrixsorozat az A mátrix QR-felbontása. Legyenek az s_1, s_2, \dots tetszőleges komplex számok olyanok, hogy a sorozat egyetlen tagja se egyezzen meg pontosan az A mátrix valamely sajátértékével. Ekkor, ha

$$A_{k-1} - s_{k-1} I = Q_{k-1} R_{k-1}$$

QR-felbontás, legyen

$$A_k = R_{k-1} Q_{k-1} + s_{k-1} I, \quad (k=1, 2, \dots).$$

Könnyen látható, hogy a

$$P_k = Q_0 Q_1 \dots Q_k, \quad U_k = R_k R_{k-1} \dots R_1 R_0 \quad (k=1, 2, \dots)$$

jelöléseket bevezetve

$$A_k = P_{k-1}^* A P_{k-1}$$

de

$$P_k U_k = \prod_{j=1}^k (A - s_j I).$$

A QR-transzformáció konvergenciájának bizonyítása azonban λ_i^k helyett bevezetve a $\varphi_k(\lambda_i)$ értékeket ($i=1, 2, \dots, n$), ahol

$$\varphi_k(\lambda) = \prod_{j=1}^k (\lambda - s_j),$$

szóról szóra átvihető az eltolásos QR-transzformációra is, ha az s_1, s_2, \dots sorozatra a fent említett feltételek teljesülnek.

Megjegyezzük, hogy az A_k mátrixsorozat tagjainak QR-felbontását egyik esetben sem a Gram-Schmidt ortogonalizációval végezzük, hanem síkbeli forgatásokkal egyenként tüntetjük el A_k oszlopaiból a diagonális alatti elemeket. Ilyen (Givens-típusu) forgatásokról a későbbiekben még szó lesz.

Célszerű továbbá a QR-transzformációt speciális (szalagszerű¹, tridiagonális² vagy Hessenberg-féle³) mátrixokra végrehajtani, ezek alakja ugyanis (szalagszerű és tridiagonális mátrixoknál csak Hermetikus esetben) a QR-transzformációval szemben invariáns, így a konvergencia sokkal gyorsabb. (Ilyen speciális alakra hozó transzformációkat a következő fejezetben írunk le). Általános négyzetes mátrixokra gyorsabb a most ismertetésre kerülő LR-transzformáció használata, ami azonban több bizonytalanságot rejt magában.

e/ AZ LR-TRANSZFORMÁCIÓ (Rutishauser, 1958)

Tegyük fel, hogy az A $n \times n$ -es mátrix teljesíti a 3.3. tétel feltételeit, azaz előll L R alakban, ahol L alsó háromszög mátrix (diagonálisában 1-esekkel), R pedig felső háromszög alakú. Mivel L nem-szinguláris, képezhetjük vele a következő hasonlósági transzformációt:

$$L^{-1} A L = L^{-1} L R L = R L.$$

1./ Egy $n \times n$ -es A mátrixot *szalagszerűnek* nevezünk, ha van olyan $k < n$ természetes szám, mellyel A elemeire

$$a_{ij} = 0, \quad |i-j| > k \quad (i=1, 2, \dots, n; j=1, 2, \dots, n)$$

teljesül.

2./ Egy $n \times n$ -es A mátrix *tridiagonális*, ha $k=1$ mellett szalagszerű.

3./ Egy $n \times n$ -es A mátrix *felső (alsó) Hessenberg-féle*, ha elemeire

$$\begin{aligned} a_{ij} &= 0, \quad j < i-1 & (i=k+1, \dots, n) \\ /a_{ij} &= 0, \quad j > i+1 & (i=1, 2, \dots, n-k-1) /. \end{aligned}$$

teljesül.

Ez adja az ötletet a következő iterációhoz: legyen

$$(3.19) \quad A_0 = A, \quad L_0 = L, \quad R_0 = R,$$

és ha

$$(3.20) \quad A_{k-1} = L_{k-1} R_{k-1}$$

LR-felbontás létezik, akkor legyen

$$(3.21) \quad A_k = R_{k-1} L_{k-1} \quad k=1, 2, \dots$$

3.5. Definíció: A (3.19), (3.20), (3.21) összefüggésekkel definiált A_k mátrixsorozatot (ha van olyan K küszöb, hogy minden $k > K$ esetén az A_k mátrixnak létezik LR-felbontása) az A mátrix *LR-transzformációjának* nevezzük.

3.6. Tétel: Ha az A egyszerű strukturájú, négyzetes mátrixra teljesülnek a 3.3. tétel feltételei, akkor a fenti L_k , R_k , A_k sorozatok konvergenssek, mégpedig

$$\lim_{k \rightarrow \infty} L_k = I, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} R_k = \lim_{k \rightarrow \infty} A_k = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \times & \\ 0 & & & \ddots \\ & & & & \lambda_n \end{bmatrix},$$

ahol tetszőleges elemeket jelent. (Tehát az R_k mátrix diagonalisában keletkeznek az A mátrix sajátértékei.)

Bizonyítás: Vezessük be a következő jelöléseket:

$$(3.22) \quad T_k = L_0 L_1 \dots L_k, \quad U_k = R_k R_{k-1} \dots R_1 R_0 \\ (k=1, 2, \dots).$$

Könnyen látható, hogy T_k szintén alsó háromszög alakú, diagonálisában 1-esekkel, U_k pedig felső háromszög mátrix. Indukcióval megmutatható, hogy

$$(3.23) \quad T_k U_k = A^k,$$

azaz $T_k U_k$ adja az A^k mátrix LU-felbontását (ami létezik, feltéve, hogy A -nak is létezik LU-felbontása). A konvergencia bizonyítása hasonló a QR-algoritmusáéhoz, a sajátértékek elhelyezkedésének megfelelően itt is több esetet különböztetünk meg:

i/ Először tegyük fel, hogy az A mátrix sajátértékeire a

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| > \dots > |\lambda_n|$$

relációk teljesülnek. Akkor

$$(3.24) \quad A^k = X \Lambda^k X^{-1} = X \Lambda^k Y = L_X U_X \Lambda^k (L_Y U_Y).$$

ahol $Y = X^{-1}$, L_X , L_Y alsó háromszög mátrixok, diagonálisukban 1-esekkel, U_X , U_Y pedig felső háromszög alakúak. Tegyük fel egyelőre, hogy az X és Y mátrixra teljesülnek a 3.3. tétel feltételei. Ekkor (3.24)-et tovább bonthatjuk:

$$\begin{aligned} A^k &= L_X U_X (\Lambda^k L_Y \Lambda^{-k}) \Lambda^k U_Y \\ (3.25) \quad &= L_X U_X (I + E_k) U_Y \quad (\text{ahol } \lim_{k \rightarrow \infty} E_k = 0) \\ &= L_X (I + F_k) U_X U_Y \quad (\text{ahol } \lim_{k \rightarrow \infty} F_k = 0). \end{aligned}$$

Az $I + F_k$ mátrix LU-felbontása elég nagy k -ra létezik (mégpedig a felbontás mindkét tényezője az identitás-mátrixhoz konvergál), de az első valahány k indexre nem biztos, hogy létezik. Így a QR-algoritmussal ellentétben ez az eljárás elakadhat valamely korai lépésben, jóllehet egészében konvergens. Ettől eltekintve a (3.25) összefüggésből látható, hogy az A_k mátrix LU-felbontásának alsó háromszög tényezőjére

$$(3.26) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} T_k = L_X ,$$

így

$$\lim_{k \rightarrow \infty} L_{k+1} = \lim_{k \rightarrow \infty} T_k^{-1} T_{k+1} = I .$$

Ebből

$$\lim_{k \rightarrow \infty} A_{k+1} = \lim_{k \rightarrow \infty} R_k T_k = \lim_{k \rightarrow \infty} R_k = R_\infty .$$

Mivel R_∞ felső háromszög alakú és az A_k mátrixok hasonlóak, az A_k sorozat olyan felső háromszög mátrixhoz konvergál, mely a λ_i számokat tartalmazza nem-növekvő sorrendben diagonálisában ($i=1, 2, \dots, n$).

ii/ Ha Y -nak nem létezik LU-felbontása (ugyanaz végigcsinálható az X mátrixszal is, ha annak sem létezik LU-felbontása), akkor is van olyan P permutációmátrix, hogy

$$(3.27) \quad P Y = L_Y U_Y ,$$

amivel

$$A^k = X \Lambda^k P^* L_Y U_Y = (X P^*) (P \Lambda^k P^*) (L_Y U_Y) .$$

Ha az XP^* mátrixnak is létezik LU-felbontása ($L_X U_X$), akkor - az i/-ben leírtakhoz hasonlóan - látható, hogy $\lim_{k \rightarrow \infty} T_k = L_X$ és az

A_k sorozat egy felső háromszög mátrixhoz konvergál, mely a sajátértékek P szerinti permutációját tartalmazza diagonálisában. (A konvergencia tehát csak akkor látható be, ha van olyan P permutációmátrix, hogy a PY és XP^* mátrixokra egyszerre teljesülnek a 3.3. tétel feltételei. Ha A Hermitikus, akkor $X = Y$, így mindig van közös P permutációmátrix.)

iii/ Többszörös sajátértékek esetén (ha mátrixunk egyszerű strukturájú) a bizonyítás analóg a QR-transzformáció konvergenciájára kimondott tétel bizonyításának harmadik részével. Ekkor az $X P^* \tilde{L}$ mátrix LU-felbontásának kell léteznie, ahol \tilde{L} ugyanaz, mint a d/iii. részben volt. Ha A Hermitikus, pozitív

definit, ez mindig teljesül. Könnyen látható, hogy ekkor az $I + F_k$ mátrix LU-felbontása tetszőleges k indexre létezik. Legyen ui. $P Y = L_1 U_1$, $X P^s = U_1^s L_1^s$. Mivel

$$X P^s \tilde{L} = U_1^s L_1^s \tilde{L},$$

ezért az $L_1 \tilde{L}$ mátrixnak kell LU-felbonthatónak lennie. De \tilde{L} választása miatt könnyen látható, hogy a 3.3. tételben szereplő összes főminor determinánsa legalább 1.

Nézzük meg, mit tudunk ebből az A_k sorozat konvergenciájára mondani. A (3.22) összefüggés miatt, és mivel

$$A_k = T_{k-1}^{-1} A T_{k-1},$$

ha $\lim_{k \rightarrow \infty} T_k = L_X$ (ahol az L_X mátrix az X mátrix oszlopai valamely átrendezésével nyert mátrix LU-felbontásának alsó háromszög faktora), akkor

$$\lim_{k \rightarrow \infty} A_k = L_X^{-1} A L_X = U_X X^{-1} A X U^{-1} = U_X \Lambda U_X^{-1},$$

ami felső háromszög mátrix, diagonálisában a sajátértékekkel. (Ha X oszlopait átrendezzük, akkor Λ diagonálisában a sajátértékek még permutálódhatnak is, jelölje $\lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_n}$ a sajátértékeknek a P szerinti permutációját!)

Mivel $L_k = T_{k-1}^{-1} T_k$, ezért $\lim_{k \rightarrow \infty} L_k = I$ és $A_k = L_k R_k$ miatt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} R_k = \lim_k A_k = \begin{bmatrix} \lambda_{i_1} & & & \\ & \lambda_{i_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_{i_n} \end{bmatrix} \begin{matrix} X \\ \\ \\ \end{matrix}, \text{ amit bizonyítani akartunk.}$$

Láttuk, hogy az LR-transzformáció konvergenciájához sokkal több feltételnek kell teljesülnie, mint a QR-transzformációéhoz. A bizonyításból az is kitűnik, hogy a konvergenciasebesség itt is a szomszédos sajátértékek abszolútértékei hányado-

dosának maximumával együtt nő. A QR- és LR-transzformációk hi-
vei még ma is vitatkoznak, melyik transzformáció a jobb. Két-
ségtelen, hogy az LR-algoritmus konvergenciájához több kikötés-
nek kell teljesülnie általános négyzetes mátrixok esetén, vi-
szont épp ilyen mátrixokra ez a transzformáció sokkal gyorsabb,
mint a QR. Nincsen meg azonban az a jó tulajdonsága, hogy spe-
ciális alakú (szalagszerű, tridiagonális, Hessenberg-féle) mát-
rixokra a transzformált mátrixsorozat megtartja a kiindulásul
vett mátrix alakját. (Igy ilyen speciális alakú mátrixokra in-
kább a QR-transzformációt szokták alkalmazni, vagy a mátrixot
előbb ilyen alakra hozni, ez azonban már a következő fejezet
témája.)

4. A MÁTRIX ELŐZETES TRANSZFORMÁCIÓJÁN ALAPULÓ MÓDSZEREK

Ebben a fejezetben is négyzetes mátrixok spektrálfelbontá-
sával foglalkozunk. Mátrixunkat először azonban hasonlósági
transzformációkkal egyszerűbb alakra hozzuk. Ez általában a
Hessenberg-féle alakot jelenti (szimmetrikus mátrixokra ez
tridiagonális), és a transzformáció $\left(\begin{smallmatrix} n \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$ lépésben végrehajtható
nagy pontossággal. A transzformációk stabilitásának vizsgálatát
ld. [14]-ben.

A már transzformált mátrixokra részben speciális módszere-
ket (a sajátértékek behatárolása Gersgorin-körökkel), részben
az eddig megismert módszereket (pl. QR-transzformáció) használ-
juk, azonban az utóbbiak is annyira felgyorsulnak ilyen eset-
ben, hogy időben megéri az előzetes transzformáció, és a pon-
tosságból sem sokat veszítünk (ezeknek a transzformációknak a
folytonossága miatt). A továbbiakban mindig feltesszük, hogy
mátrixunk valós elemű (ui. valós mátrixokra a szóbanforgó transz-
formációknak konkrét geometriai jelentése van, így sokkal egy-
szerűbben leírhatók), természetesen ezek a transzformációk kis
módosítással komplex elemű mátrixokra is végrehajthatók.

a/ VALÓS SZIMMETRIKUS MÁTRIXOK ESETE

A mátrixot először tridiagonális alakra hozzuk. Erre két módszer is ismeretes:

i/ *Householder módszere* a mátrixot síkokra való tükrözéseknek veti alá. Ezeket rögtön meg is konstruáljuk.

4.1. Tétel: Legyen A szimmetrikus, $n \times n$ -es mátrix. Ez $n-2$ lépésben tridiagonális alakra hozható $I - 2\underline{u}\underline{u}^T$ ($\|\underline{u}\| = 1$) alakú mátrixokkal való hasonlósági transzformációkkal (ez nem más, mint az $\underline{u} \in E_n$ normális síkra való tükrözés).

Bizonyítás: (vázlat) Jelölje

$$C = \begin{bmatrix} c_1 & b_1 & & & 0 \\ b_1 & c_2 & b_2 & & \\ & b_2 & c_3 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & c_{n-1} & b_{n-1} \\ & & & b_{n-1} & c_n \end{bmatrix}$$

a már tridiagonális alakra transzformált mátrixot. Most megkonstruáljuk a P_1, P_2, \dots, P_{n-2} tükrözések mátrixát (melyeket az egyszerűség kedvéért szintén ezekkel a betűkkel fogunk jelölni).

Keresem a P_1 mátrixot az $I - 2\underline{u}_1\underline{u}_1^T$ ($\|\underline{u}_1\| = 1$) alakban úgy, hogy

$$A^{(1)} = P_1 A P_1 = \begin{bmatrix} c_1 & b_1 & 0 & \dots & 0 \\ b_1 & & & & \\ 0 & & \times & & \\ \vdots & & & \times & \\ 0 & & & & \end{bmatrix}$$

azaz $A^{(1)}$ az első sort és oszlopot tekintve már az adott alakú (\times tetszőleges elemeket jelöl, melyek pontos értéke a transzformáció során adódik). A megoldást az \underline{u}_1 vektor következő választása adja:

$$\underline{u}_1 = \frac{1}{d_1} \begin{bmatrix} 0 \\ a_{21} + b_1 \\ a_{31} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix}, \text{ ahol } b_1^2 = \sum_{k=2}^n a_{k1}^2 \text{ és } \text{sign } b_1 = \text{sign } a_{21}$$

$$d_1 = \sqrt{(a_{21} + b_1)^2 + a_{31}^2 + \dots + a_{n1}^2}.$$

(a jegyvesztések elkerülése végett).

Ebből $c_1 = a_{11}$. Tegyük fel, hogy az $(i-1)$ -edik lépés után $(i=2, 3, \dots)$ az első $i-1$ sor és oszlop a megfelelő helyeken már zérus elemeket tartalmaz, azaz mátrixunk az

$$A^{(i-1)} = \left[\begin{array}{cc|ccc} c_1 & b_1 & & & \\ b_1 & c_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & b_{i-2} & \\ & & & b_{i-2} & c_{i-1} \\ \hline & & & & \\ & & & & a_{ii}^{(i-1)} \dots a_{in}^{(i-1)} \\ & & & & \vdots \\ & & & & a_{ni}^{i-1} \dots a_{nn}^{i-1} \end{array} \right]$$

alakot veszi fel. Legyen most

$$\underline{u}_i = \left[\begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ a_{i+1,i}^{(i-1)} + b_i \\ a_{i+2,i}^{(i-1)} \\ \vdots \\ a_{ni}^{(i-1)} \end{array} \right] \Bigg\}_i, \text{ ahol } b_i^2 = \sum_{k=i+1}^n a_{ki}^{(i-1)2}$$

$$d_i = \sqrt{(a_{i+1,i}^{(i-1)} + b_i)^2 + a_{i+2,i}^{(i-1)2} + \dots + a_{ni}^{(i-1)2}}$$

és $\text{sign } b_i = \text{sign } a_{i+1,i}^{(i-1)}$

(a jegyvesztések elkerülése végett).

Ebből adódik, hogy $c_i = a_{ii}^{(i-1)}$. Mátrixunk a $P_i = I - \frac{u_i u_i^*}{\|u_i\|^2}$ ($\|u_i\|^2 = 1$) szimmetrikus, ortonormált mátrixszal való hasonlósági transzformáció után:

$$A^{(i)} = P_i A^{(i-1)} P_i.$$

Vegyük észre, hogy P_i az első $i-1$ sort és oszlopot változtatlanul hagyja, mivel u_i első i elemét zérusnak választottuk. Végül a

$$C = A^{(n-2)} = P_{n-2} \dots P_2 P_1 A P_1 P_2 \dots P_{n-2}$$

mátrix már a kívánt alakú, ahol tehát az eredeti A mátrixot a

$$P = P_1 P_2 \dots P_{n-2}$$

szimmetrikus, ortonormált mátrixszal való hasonlósági transzformációnak vetettük alá. Mivel az A mátrix is szimmetrikus, elegendő a transzformációkat csak az alsó- vagy felső felére végrehajtani, míg a másik fele az u_i vektorok tárolására szolgálhat (ui. az u_i vektor első i komponense zérus, $(i=1,2,\dots,n-2)$).

ii/ *Givens módszere* az A szimmetrikus, valós elemű mátrixot síkbeli forgatásoknak veti alá.

4.2. Tétel: Síkbeli forgatásokkal tetszőleges $n \times n$ -es szimmetrikus mátrix oszloponként ($n-2$ fő lépésben) tridiagonális alakra hozható. Az r -edik fő lépés ($r=1,2,\dots,n-2$) $n-r-1$ db elemi forgatás szorzata.

Bizonyítás: Itt is konstruktív úton bizonyítunk. A bizonyítást most csak vázlatosan közöljük, mivel ez a nem-szimmetrikus mátrixokra alkalmazott Givens-módszer speciális esete, azt pedig a fejezet b/ részében fogjuk részletezni.

Tegyük fel, hogy az r -edik fő lépés elején mátrixunk első $r-1$ sora és oszlopa már a kívánt alakú ($r=1,2,\dots,n-3$), az állítás $r=1$ esetén nem jelent különösebb kikötést az eredeti mátrixra. Ezután az r -edik sor és oszlop $r+2,\dots,r+n$ -edik koordinátáit tesszük zérussá úgy, hogy az első $r-1$ sor és oszlop változatlan maradjon. Ez elérhető az $(r+1,r+2), (r+1,r+3), \dots, (r+1,r+n)$ koordináták síkjában való forgatásokkal. Az r -edik lépésben ez összesen $n-r-1$ db. elemi forgatást jelent. Jelölje itt is a kapott ortogonális transzformációk szorzatát P , akkor a kapott tridiagonális mátrix $P^T A P$.

A Householder-módszer $\frac{2}{3} n^3$, míg a Givens-módszer $\frac{4}{3} n^3$ szorzást tartalmaz. A négyzetgyökvonások száma megegyezik. Tehát a Householder-módszer a gyorsabb és programozni is egyszerűbb. Mindkét módszer gyorsabb azonban a Jacobinál, beszámítva a sajátértékek most ismertetésre kerülő meghatározását, a speciális alakú homogén lineáris egyenletrendszer megoldását és a sajátvektoroknak a P ortonormált mátrixszal való visszatranszformálását.

Egy szimmetrikus tridiagonális mátrix sajátértékeinek meghatározására bevezetjük a következő fogalmakat:

4.1. Definíció: A $p_n(x), p_{n-1}(x), \dots, p_1(x), p_0(x)$ polinomsorozat (ahol $p_k(x)$ k -adfokú polinom) *Sturm-sorozat*ot alkot, ha $p_0(x)$ nem azonosan zérus polinom, és $p_k(x_0) = 0$ esetén

$$p_{k-1}(x_0)p_{k+1}(x_0) < 0, \quad (k=2,3,\dots,n-1),$$

azaz a sorozat bármely nem-szélső polinomjának a gyökhelyén a szomszédos polinomok ellenkező előjelűek.

Jelölje $V(x)$ a fenti polinomsorozat x helyhez tartozó előjelváltásainak számát.

4.3. Tétel (Sturm tétele): A $p_n(x)$ polinom (a,b) intervallumbeli gyökeinek száma $V(a)-V(b)$.

Most alkalmazzuk ezt a kapott tridiagonális mátrixra. Feltehetjük, hogy $b_i \neq 0$ ($i=1,2,\dots,n-2$), ellenkező esetben a fela-

dat alacsonyabb rendű tridiagonális mátrix sajátérték-feladatára vezethető vissza.

Jelölje $p_k(\lambda)$ a $\lambda I - C$ mátrix k -adik bal felső sarokminorának a determinánsát ($k=1,2,\dots,n$), $p_0(\lambda)$ legyen az azonosan 1 polinom. Könnyen látható, hogy $p_k(\lambda)$ pontosan k -adfoku polinom, továbbá igaz a következő rekurzió:

$$\begin{aligned} p_0(\lambda) &= 1, \\ p_1(\lambda) &= \lambda - c_1, \\ &\vdots \\ p_k(\lambda) &= (\lambda - c_k) p_{k-1}(\lambda) - b_{k-1}^2 p_{k-2}(\lambda), \quad (k=2,3,\dots,n). \\ p_n(\lambda) &= |\lambda I - C|. \end{aligned}$$

Könnyen látható, hogy a $p_k(\lambda)$, ($k=0,1,\dots,n$) polinomsorozat Sturm-sorozatot alkot. Mivel a $p_k(\lambda)$ polinomok főegyütthatója 1, a sorozat előjelváltásainak száma $\lambda \rightarrow \infty$ esetén zérus. Így Sturm tétele miatt a fenti polinomsorozat λ helyhez tartozó előjelválasztásainak száma megadja a $p_n(\lambda) = |\lambda I - C|$ karakterisztikus polinomban a λ -nál nagyobb gyökök számát.

Igy tehát az eljárás a következő: meghatározzuk a fenti polinomsorozatot, Gersgorin-körök segítségével (melyek valós mátrix esetén intervallumok) tájékozódunk a sajátértékek elhelyezkedéséről, végül a kapott intervallumokban fokozatos intervallumfelezéssel behatároljuk őket.

Az eljárásra Givens módszerével egybekötve a függelék c. részében FORTRAN program található. A módszer egy szimmetrikus $n \times n$ -es mátrix k legnagyobb ($k \leq n$) sajátértékét és a hozzájuk tartozó sajátvektorokat adja az ott leírt opcióknak megfelelően.

b/ VALÓS NEM-SZIMMETRIKUS MÁTRIXOK ESETE

Mátrixunkat most felső Hessenberg-alakra transzformáljuk a szimmetrikus mátrixokra ismertetett két módszer valamelyikével.

i/ *Householder módszere*: Itt is $n-2$ lépésben, sikra való tükrözésekkel, oszloponként tesszük zérussá a nemkívánatos elemeket. Legyen $A^{(0)} = A$ és a $k-1$ -edik ($k=1, 2, \dots, n-2$) lépés után (a 0-adik lépés a helybenhagyás, a következő partició pedig A_0 megfelelő particiója, ahol zérus elemek még nincsenek):

$$A^{(k-1)} = \left[\begin{array}{c|c} H_{k-1} & C_{k-1} \\ \hline \underbrace{\begin{array}{c|c} 0 & \underline{b}_{k-1} \end{array}}_{k-1} & B_{k-1} \end{array} \right] \Bigg\}^{k-1}$$

Ebben a particióban H_{k-1} már felső Hessenberg alakú, C_{k-1} , B_{k-1} a $(k-1)$ -edik lépés során adódó (nem speciális alakú) mátrixok, \underline{b}_{k-1} pedig $n-k+1$ dimenziós vektor. Legyen a P_k ortogonális transzformáció a következő transzformációkból összerakva (a transzformációk mátrixát is ugyanazokkal a betűkkel jelölöm):

$$P_k = \left[\begin{array}{c|c} I_k & 0 \\ \hline 0 & Q_k \end{array} \right] \Bigg\}^k, \quad \text{ahol } Q_k = I - \underline{v}_k \underline{v}_k^*,$$

$$\underline{v}_k \in E_{n-k}, \quad \|\underline{v}_k\| = 1$$

(E_n az n -dimenziós valós euklideszi tér),

és a \underline{v}_k vektort úgy választjuk, hogy az

$$A^{(k)} = P_k A^{(k-1)} P_k = \left[\begin{array}{c|c} \overbrace{H_{k-1}}^{k-1} & C_{k-1} Q_k \\ \hline \underbrace{\begin{array}{c|c} Q_k \underline{b}_{k-1} & Q_k B_{k-1} Q_k \end{array}}_{k-2} \end{array} \right] \Bigg\}^{k-1}$$

mátrixban $Q_k \underline{b}_{k-1}$ első eleme kivételével zérusokat tartalmazzon. A P_k transzformációt felfoghatjuk egy \underline{w}_k normálisú sikra való tükrözésnek, ahol $\underline{w}_k \in E_n$, $\|\underline{w}_k\| = 1$ és \underline{w}_k első k komponense

zérus, azaz

$$P_k = I - 2 \underline{w}_k \underline{w}_k^T.$$

Könnyen látható, hogy a megoldást a

$$\underline{w}_k = \frac{1}{d_k} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ a_{k+1,k}^{(k-1)} \pm \sqrt{\sum_{i=k+1}^n a_{ik}^{(k-1)2}} \\ a_{k+2,k}^{(k-1)} \\ \vdots \\ a_{nn}^{(k-1)} \end{bmatrix}$$

vektor adja, ahol $d_k = 2 \sqrt{\sum_{i=k+1}^n a_{ik}^{(k-1)2}} \pm a_{k+1,k}^{(k-1)} \sqrt{\sum_{i=k+1}^n a_{ik}^{(k-1)2}},$

és az előjelet úgy választjuk, hogy a jegyvesztés a lehető legkisebb legyen.

Ez összesen $\frac{5}{3} n^3$ szorzást jelent. Maga a módszer hasonló a szimmetrikus mátrixokra leírt Householder módszerhez (természetesen szimmetrikus mátrixokra tridiagonális alakot ad), azonban a számítógépes program szervezése sokkal nehezebb, mivel a mátrix felső felét nem használhatjuk részeredmények tárolására.

ii/ *Givens módszere*: $n-2$ fő lépésből áll. Tegyük fel, hogy az $(r-1)$ -edik lépés után az A mátrix első $r-1$ sora és oszlopa már felső Hessenberg alakú ($r=1,2,\dots,n-2$, de $r=1$ esetén a kijelentés nem tartalmaz plusz kikötést az A mátrixra), azaz a következőképpen particionálható (itt egyelőre tetszőleges elemeket jelöl):

$$A^{(r-1)} = \left[\begin{array}{c|c} \begin{array}{ccc} \times & & \times \\ \times & \times & \\ \times & & \times \end{array} & \begin{array}{c} \times \\ \times \\ \times \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array} & \begin{array}{c} \times \\ \times \\ \vdots \\ \times \end{array} \end{array} \right] \begin{array}{l} \left. \vphantom{\begin{array}{c} \times \\ \times \\ \times \end{array}} \right\} r-1 \\ \left. \vphantom{\begin{array}{c} \times \\ \times \\ \times \end{array}} \right\} r-1 \end{array}$$

Itt az r -edik oszlop bekarikázott elemeit kívánjuk eltüntetni. Ez $n-r-1$ lépésben történik (vagyis egyenként tesszük zérussá őket): az r -edik oszlop $i=r+2, r+3, \dots, n$ -edik elemét az

$$R_{ri} = \left[\begin{array}{cccc} 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \cos \vartheta & \dots & \sin \vartheta \\ & \vdots & 1 & \vdots \\ \vdots & & & \ddots \\ \vdots & -\sin \vartheta & \dots & \cos \vartheta \\ 0 & \vdots & & \vdots \\ & & & 1 \end{array} \right] \begin{array}{l} r+1. \\ i. \\ r+1. \\ i. \end{array}$$

mátrixszal való hasonlósági transzformáció tünteti el, ami az $(r+1, i)$ síkban való elemi forgatás, ahol

$$\cos \vartheta = \frac{a_{r+1, r}^{(r-1)}}{\sqrt{a_{r+1, r}^{(r-1)2} + a_{ir}^{(r-1)2}}}, \quad \sin \vartheta = \frac{a_{ir}^{(r-1)}}{\sqrt{a_{r+1, r}^{(r-1)2} + a_{ir}^{(r-1)2}}}$$

(ha $a_{r+1,r}^{(r-1)^2} + a_{ir}^{(r-1)^2} = 0$, akkor legyen $\cos\vartheta = 1$, $\sin\vartheta = 0$).

Ezekkel $a_{r+1,r}^{(r)} = \sqrt{a_{r+1,r}^{(r-1)^2} + a_{ir}^{(r-1)^2}}$, $a_{ir}^{(r)} = 0$,

$$(4.1) \quad a_{r+1,j}^{(r)} = a_{r+1,j}^{(r-1)} \cos\vartheta + a_{ij}^{(r-1)} \sin\vartheta,$$

$$(4.2) \quad a_{ij}^{(r)} = -a_{r+1,j}^{(r-1)} \sin\vartheta + a_{ij}^{(r-1)} \cos\vartheta,$$

$$(4.3) \quad a_{j,r+1}^{(r)} = a_{j,r+1}^{(r-1)} \cos\vartheta + a_{ji}^{(r-1)} \sin\vartheta,$$

$$(4.4) \quad a_{ji}^{(r)} = -a_{j,r+1}^{(r-1)} \sin\vartheta + a_{ji}^{(r-1)} \cos\vartheta, \quad (j=r+2, r+3, \dots, n).$$

Az $R_{ri} A^{(r-1)} R_{ri}^*$ mátrixban a (4.1) és (4.2) összefüggés az előlről, míg a (4.3) és (4.4) összefüggés a hátulról való szorzást eredményezi (az első két transzformáció csak a függőlegesen-, a második kettő csak a vízszintesen sraffozott részt változtatja az $A^{(r-1)}$ mátrixban).

A Hessenberg-féle mátrix sajátértékeit ezután QR-transzformációval határozzuk meg. Bebizonyítható, hogy a Hessenberg-mátrix alakja QR-transzformációval szemben invariáns, ami a transzformáció elvégzését nagy mértékben leegyszerűsíti (ld. [6]). Végül a sajátvektorokat a speciális alaku homogén lineáris egyenletrendszer megoldásával kapjuk, majd transzformáljuk őket a Hessengberg-alakra hozás ortogonális transzformációjának a transzponáltjával. Erre található FORTRAN program a függelék d. részében.

Itt tartom lényegesnek megjegyezni, hogy a QR-transzformáció lépéseiben magát a QR-felbontást nem Gram-Schmidt-féle ortogonalizációval szokás végezni, hanem elemi forgatásokkal tesszik zérussá az egyes iterációs lépésekben kapott mátrixok diagonális alatti elemeit.

Tekintsük a kiindulásul vett $n \times n$ -es A mátrixot. Könnyen látható, hogy az első oszlop $j=n, n-1, \dots, 2$ -edik elemét az S_{j1} mátrixszal való, előlről történő szorzás tünteti el, ahol

$$S_{j1} = \begin{bmatrix} \cos \vartheta_{j1} & & \sin \vartheta_{j1} & & 0 \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ -\sin \vartheta_{j1} & & & \cos \vartheta_{j1} & \\ 0 & & & & 1 & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} j. \\ \\ \\ j. \end{matrix}$$

és ez a $\tan \vartheta_{j1} = \frac{a_{j1}^{(n-j)}}{a_{11}^{(n-j)}}$ ($j=n, n-1, \dots, 2$) választással érhető el

(a felső index mindig az előző lépésben kapott mátrix elemeit jelöli, $A^{(0)} = A$). Így tehát az első oszlop diagonális alatti elemeit eltüntető transzformáció az $S_{21} S_{31} \dots S_{n1}$ mátrixszorzattal adható meg. Ezt végrehajtva az $i=2, 3, \dots, n-1$ -edik oszlopokra, az A mátrix QR-felbontásában szereplő Q mátrix a következő:

$$(4.5) \quad m \leq n \text{ esetén: } Q = \prod_{i=1}^{m-1} \prod_{j=n-i+1}^m P_{m+i+1-j, i},$$

$$(4.6) \quad m > n \text{ esetén: } Q = \prod_{i=1}^n \prod_{j=i+1}^m P_{m+i+1-j, i}$$

ahol

$$S'_{ji} = P_{ji} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & 1 & \\ -\cos \vartheta_{ji} & & & & \sin \vartheta_{ji} & 0 \\ & 1 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & 1 & & \\ -\sin \vartheta_{ji} & & & & \cos \vartheta_{ji} & \\ & & & & & 1 & \ddots & \\ & & & & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} i. \\ \\ \\ j. \end{matrix}$$

Az $R = Q^* A$ mátrix az algoritmus miatt felső háromszög alakú.

Ez az előállítás azért is lényeges, mert látható, hogy Hessenberg (ill. szimmetrikus tridiagonális) mátrixok esetén a (4.5) és (4.6) szorzat pusztán $n-1$ tényezőből áll, azaz a QR-transzformáció első lépése után:

$$(4.7) \quad A^{(1)} = Q^* A Q = \underbrace{S_{21} \quad S_{32} \quad \dots \quad S_{n,n-1} \quad A \quad P_{n,n-1} \quad \dots \quad P_{32} \quad P_{21}}_{\vdots}$$

A (4.7) összefüggésből könnyen látható, hogy a kapcsos zárójelekben álló hasonlósági transzformációk a Hessenberg-féle (szimmetrikus tridiagonális) mátrix alakját nem változtatják meg, tehát igaz a következő állítás:

4.1. Állítás: Hessenberg-féle és szimmetrikus tridiagonális mátrixok alakja QR-transzformációra nézve invariáns.

5. ÁLTALÁNOS VALÓS MÁTRIXOK SZINGULÁRIS FELBONTÁSA

a/ A QRPS-ALGORITMUS (1982, ld. [2])

A 3.2. tétel alapján lehetséges a QR-algoritmus következő általánosítása tetszőleges valós mátrixra. Legyen A $m \times n$ -es valós mátrix és $A^{(0)} = A$. Képezzük a következő sorozatot: Legyenek

$$(5.1) \quad A^{(k-1)} = Q^{(k-1)} R^{(k-1)} \quad \text{és} \quad A^{(k-1)*} = P^{(k-1)} S^{(k-1)} \\ (k=1, 2, \dots)$$

QR-felbontások, ahol tehát $Q^{(k-1)}$ ill. $P^{(k-1)}$ $m \times m$ -es ill. $n \times n$ -es ortogonális, $R^{(k-1)}$ ill. $S^{(k-1)}$ pedig $m \times n$ -es ill. $n \times m$ -es felső trianguláris mátrixok. Ekkor legyen

$$(5.2) \quad A^{(k)} = R^{(k-1)} P^{(k-1)}, \text{ így } A^{(k)'} = S^{(k-1)} Q^{(k-1)} \\ (k=1, 2, \dots).$$

Könnyen látható, hogy $A^{(k)} = Q^{(k-1)'} A^{(k-1)} P^{(k-1)}$, ahol $Q^{(k-1)}$ és $P^{(k-1)}$ ortogonális mátrixok, így a sorozat tagjainak szinguláris értékei megegyeznek (a szinguláris felbontás definíciója és a szinguláris értékek egyértelmősége miatt).

5.1. Tétel: Az így képzett sorozatra

$$\lim_{k \rightarrow \infty} A^{(k)} = S,$$

ahol $A = V S U^T$ szinguláris felbontás.

5.1. Lemma: $A \rightarrow A^{(2)} A^{(2)'} \rightarrow \dots \rightarrow A^{(2k)} A^{(2k)'} \rightarrow \dots$ közösleges QR-sorozat. Hasonló igaz az $A^{(1)} A^{(1)'} \rightarrow A^{(3)} A^{(3)'} \rightarrow \dots \rightarrow A^{(2k+1)} A^{(2k+1)'} \rightarrow \dots$ sorozatra is.

A lemma bizonyítása: A k -adik lépés után ($k=0, 1, 2, \dots$):

$$(5.3) \quad \begin{aligned} A^{(2k)} A^{(2k)'} &= Q^{(2k)} R^{(2k)} P^{(2k)} S^{(2k)} = \\ &= Q^{(2k)} A^{(2k+1)} S^{(2k)} \\ &= (Q^{(2k)} Q^{(2k+1)'}) (R^{(2k+1)} S^{(2k)}), \end{aligned}$$

ahol $Q^{(2k)} Q^{(2k+1)'}$ ortogonális, $R^{(2k+1)} S^{(2k)}$ pedig felső trian-
guláris mátrix. (5.3)-ban a jobboldali szorzat tényezőit fel-
cserélve:

$$\begin{aligned} R^{(2k+1)} S^{(2k)} Q^{(2k)} Q^{(2k+1)'} &= R^{(2k+1)} A^{(2k+1)'} Q^{(2k+1)} \\ &= R^{(2k+1)} P^{(2k+1)} S^{(2k+1)} Q^{(2k+1)} = A^{(2k+2)} A^{(2k+2)'}, \end{aligned}$$

azaz a sorozat $(k+1)$ -edik tagját kapjuk.

Az $A^{(1)} A^{(1)'} \rightarrow A^{(3)} A^{(3)'} \rightarrow \dots \rightarrow A^{(2k+1)} A^{(2k+1)'} \rightarrow \dots$

sorozatról is hasonlóan látható, hogy a sorozat egymást követő tagjai a közös séges QR-algoritmus képzési szabályát követik, ahol a sorozat tagjainak QR-felbontása:

$$(5.4) \quad A^{(2k+1)} A^{(2k+1)'} = (Q^{(2k+1)} Q^{(2k+2)}) (R^{(2k+2)} S^{(2k+1)}).$$

Ezzel a lemmát beláttuk. Hasonlóan bizonyítható a következő lemma is:

5.2. Lemma: $A' A \rightarrow A^{(2)'} A^{(2)} \rightarrow \dots \rightarrow A^{(2k)'} A^{(2k)} \rightarrow \dots$ és

$A^{(1)'} A^{(1)} \rightarrow A^{(3)'} A^{(3)} \rightarrow \dots \rightarrow A^{(2k+1)'} A^{(2k+1)} \rightarrow \dots$ is közös séges QR-sorozat.

A lemmák bizonyítása után a tétel már néhány észrevétellel visszavezethető a 3.5. tételre.

A tétel bizonyítása: Legyen

$$(5.5) \quad V^{(k)} = Q^{(0)} Q^{(1)} \dots Q^{(k)}, \quad U^{(k)} = P^{(0)} P^{(1)} \dots P^{(k)} \\ (k=0, 1, 2, \dots)$$

Ezekkel

$$(5.6) \quad A^{(k)} = Q^{(k-1)'} A^{(k-1)} P^{(k-1)} = Q^{(k-1)'} Q^{(k-2)'} \\ A^{(k-2)} P^{(k-2)} P^{(k-1)} = \dots = V^{(k-1)'} A U^{(k-1)}.$$

Mivel $A = V S U'$ szinguláris felbontás, a $\lim_{k \rightarrow \infty} U^{(k)} = U$ és a

$\lim_{k \rightarrow \infty} V^{(k)} = V$ összefüggésekből $\lim_{k \rightarrow \infty} A^{(k)} = S$ már következik

(5.6) alapján.

Az $A A' \rightarrow A^{(2)'} A^{(2)} \rightarrow \dots$ sorozat (mivel az $A A'$ mátrix QR-sorozata) tagjainak QR-felbontásában szereplő ortogonális mátrixok szorzatáról viszont a 5.3. tétel és annak bizonyítása

alapján tudjuk, hogy

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (Q^{(0)} Q^{(1)}) (Q^{(2)} Q^{(3)}) \dots (Q^{(2k)} Q^{(2k+1)}) = V,$$

ugyanis az $A A'$ mátrix szinguláris felbontása $V S^2 V'$, ami - mivel $A A'$ szimmetrikus, pozitív szemidefinit - egyben spektrálfelbontás is. Azaz $\lim_{k \rightarrow \infty} V^{(2k+1)} = V$.

A $V^{(k)}$ sorozat páros indexű tagjainak konvergenciája a 5.1. lemma második része alapján bizonyítható. Mivel $A^{(1)} A^{(1)}$ spektrálfelbontása $(Q^{(0)})' V S^2 (Q^{(0)})' V$, az 5.3. tétel és az (5.4) összefüggés miatt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (Q^{(1)} Q^{(2)}) (Q^{(3)} Q^{(4)}) \dots (Q^{(2k-1)} Q^{(2k)}) = Q^{(0)'} V,$$

amiből - mivel $Q^{(0)}$ nem-szinguláris - következik, hogy

$$\lim_{k \rightarrow \infty} V^{(2k)} = \lim_{k \rightarrow \infty} Q^{(0)} Q^{(1)} \dots Q^{(2k)} = V,$$

így $\lim_{k \rightarrow \infty} V^{(k)} = V$.

A $\lim_{k \rightarrow \infty} U^{(k)} = U$ összefüggés hasonlóan igazolható a 5.2. lemma alapján. Ezzel a tételt bebizonyítottuk, sőt mellette megkaptuk az $U^{(k)}$ és $V^{(k)}$ sorozatok konvergenciáját is.

5.1. Definíció: Azt az eljárást, amely az A mátrixhoz az (5.1) és (5.2) összefüggésekkel meghatározott sorozatot rendeli hozzá, *QRPS-algoritmusnak* nevezzük, az (5.1), (5.2) által definiált sorozat pedig az A mátrix *QRPS-sorozata*.

Ha az egyes lépésekben a QR-felbontásokat itt is a 2.A. tétel konstrukciója szerint végezzük, akkor a zérus szinguláris értékek itt is utolsónak adódnak ki, az U ill. V mátrixoknak pedig az utolsó $n-r$ ill. $m-r$ oszlopa forgatható el tetszőlegesen az $\text{Im}(A')^\perp$ ill. $\text{Im}(A)^\perp$ altérben (mivel a $P^{(k)}$ ill. $Q^{(k)}$

mátrixoknak az első r oszlopa van csak egyértelműen meghatározva a Schmidt-ortogonalizációnál adott konstrukció szerint), ezek az oszlopok viszont amugyis tetszőlegesen választhatók az izotróp altereken belül, mint azt az 1. fejezetben láttuk.

A QRPS-algoritmus geometriailag jól szemléltethető. Tekintsük ugyanis az A $m \times n$ -es mátrixot, mint egy $A: E_n \rightarrow E_m$ lineáris transzformáció $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n \in E_n$ ill. $\underline{f}_1, \dots, \underline{f}_m \in E_m$ bázisokra vonatkozó mátrixát. A Q és P ortogonális mátrixok az $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n$ ill. az $A'\underline{f}_1, \dots, A'\underline{f}_m$ vektorrendszert ortogonalizálják az E_m ill. E_n térben, így $Q^{(0)T} A P^{(0)}$ éppen az A leképezés mátrixát jelenti az új bázisokban felírva. Az iteráció során az új báziselemek A - ill. A' -képeit ismét ortogonalizáljuk, mindkét térben egyidejűleg. A 3.1. tétel bizonyításánál láttuk, hogy $\lim_{k \rightarrow \infty} Q^{(0)} \dots Q^{(k)} = V$ ill. $\lim_{k \rightarrow \infty} P^{(0)} \dots P^{(k)} = U$,

azaz ezeknek a bázistranszformációknak egymásutáni alkalmazásával a transzformált $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n$ ill. $\underline{f}_1, \dots, \underline{f}_m$ bázisvektorok az U ill. V mátrix oszlopvektoraihoz (azaz a saját bázispárhoz) kovergálnak az E_n ill. E_m térben. Ezért a QRPS-algoritmus a hatványiteráció téglalap alakú mátrixokra vonatkozó általánosításának tekinthető.

Most alkalmazzuk a QRPS-algoritmust úgy, hogy a k -edik lépésben az $A^{(k-1)}$ mátrix QR-felbontásával párhuzamosan nem az $A^{(k-1)'} mátrix QR-felbontását végezzük el, hanem ha$

$$(5.7) \quad A^{(k-1)} = Q^{(k-1)} R^{(k-1)} \quad (k=1, 2, \dots)$$

QR-felbontás, akkor képezzük az $R^{(k-1)'} mátrix QR-felbontását, és az ebben szereplő felső trianguláris mátrix transzponáltja legyen $A^{(k)}$. Azaz képletekkel: ha$

$$(5.8) \quad R^{(k-1)'} = P^{(k-1)} S^{(k-1)}$$

QR-felbontás, akkor legyen

$$(5.9) \quad A^{(k)'} = S^{(k-1)}, \quad \text{azaz} \quad A^{(k)} = R^{(k-1)} P^{(k-1)} \quad (k=1, 2, \dots).$$

Igy $A^{(k)}$ ($k=1, 2, \dots$) alsó trianguláris alaku. Az is könnyen látható, hogy

$$Q^{(k-1)'} A^{(k-1)} P^{(k-1)} = R^{(k-1)} P^{(k-1)} = A^{(k)},$$

ahol $Q^{(k-1)}$, $P^{(k-1)}$ ortogonális mátrixok, így a sorozat tagjainak szinguláris értékei megegyeznek.

5.2. Tétel: Erre a sorozatra is $\lim_{k \rightarrow \infty} A^{(k)} = S$, ahol $A = V S U'$ szinguláris felbontás.

5.2. Lemma: $A^{(1)} A^{(1)'} \rightarrow A^{(2)} A^{(2)'} \rightarrow \dots$ közösleges QR-sorozat.

A lemma bizonyítása: Mivel

$$A^{(k)} A^{(k)'} = Q^{(k)} R^{(k)} S^{(k-1)} \quad (k=1, 2, \dots)$$

QR-felbontásának ortogonális tényezője $Q^{(k)}$, felső trianguláris tényezője $R^{(k)} S^{(k-1)}$ (hiszen az $R^{(k)}$ és $S^{(k-1)}$ felső trianguláris mátrixok szorzata is felső trianguláris), a QR-sorozat következő tagját a két tényező felcserélésével kapjuk, ami

$$R^{(k)} S^{(k-1)} Q^{(k)} = R^{(k)} P^{(k)} P^{(k)'} A^{(k)'} Q^{(k)} = A^{(k+1)} A^{(k+1)'},$$

ezzel a lemmát beláttuk.

A lemmából az is látható, hogy ez algoritmus azért gyorsabb, mert itt az első lépés kivételével minden lépésben a kapott mátrixnak saját transzponáltjával vett szorzata adja az $A^{(1)} A^{(1)'}$ mátrix közösleges QR-sorozatát. Az eredeti QRPS-algoritmusnak csak minden második lépéséről lehetett ezt elmondani.

A tétel bizonyítása: Legyen most is

$$V^{(k)} = Q^{(0)} Q^{(1)} \dots Q^{(k)}, \quad U^{(k)} = P^{(0)} P^{(1)} \dots P^{(k)} \quad (k=1, 2, \dots).$$



Az 5.2. lemma miatt

$$(5.10) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} A^{(k)} A^{(k)'} = S^2 \quad \text{és} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} Q^{(1)} Q^{(2)} \dots Q^{(k)} = Q^{(0)'} V,$$

hiszen mivel $A^{(1)} = Q^{(0)'} A P^{(0)}$, ezért $A^{(1)} A^{(1)'} = Q^{(0)'} A A' Q^{(0)}$,
 így $A^{(1)} A^{(1)'} = (Q^{(0)'} V) S^2 (Q^{(0)'} V)'$ spektrálfelbontás. Ebből

$$\lim_{k \rightarrow \infty} V^{(k)} = \lim_{k \rightarrow \infty} Q^{(0)} Q^{(1)} \dots Q^{(k)} = V \quad \text{és az előbb elmondottak szerint az}$$

$$S^2 = \begin{bmatrix} s_1^2 & & & 0 \\ & s_2^2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & s_m^2 \end{bmatrix}$$

mátrixban az utolsó diagonális elemek lesznek zérusok, ha $r = \text{rang } (A^{(1)}) = \text{rang } (A) < m$.

Most bebizonyítjuk, hogy ebből $\lim_{k \rightarrow \infty} A^{(k)} = S$ következik.

Jelölje $\underline{a}_i^{(k)'} \quad (i=1, 2, \dots, m)$ az $A^{(k)}$ mátrix sorvektorait, azaz

$$A^{(k)} = (\underline{a}_1^{(k)} \underline{a}_2^{(k)} \dots \underline{a}_m^{(k)})',$$

ahol $\underline{a}_i^{(k)}$ utolsó $n-i$ koordinátája zérus $(i=1, \dots, m)$. Az (5.10) összefüggés miatt:

$$(5.11) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} (A^{(k)} A^{(k)'})_{ij} = \lim_{k \rightarrow \infty} \underline{a}_i^{(k)'} \underline{a}_j^{(k)} = \delta_{ij} s_i^2 \quad (1 \leq i, j \leq m).$$

Teljes indukcióval bebizonyítjuk, hogy ebből a fenti feltételek mellett $\lim_{k \rightarrow \infty} (A^{(k)})_{ij} = \delta_{ij} s_i \quad (1 \leq i, j \leq m)$ következik. (A koordinátákat a második index jelöli.) Mivel

$$\underline{a}_1^{(k)'} \underline{a}_1^{(k)} = a_{11}^{(k)2}$$

és (5.11) miatt $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{11}^{(k)2} = s_1^2$, ezért $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{11}^{(k)} = s_1$.

Elég a nem-negatív gyököket tekinteni, hisz az (5.9) összefüggés miatt az $A^{(k)}$ mátrixok diagonális elemei nem-negativak. Ha már tudjuk, hogy $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{pj}^{(k)} = \delta_{pj} s_p$ ($j=1, \dots, p$) a $p \leq i$ ($i < r = \text{rang}(A)$) indexekre, akkor mivel

$$(5.12) \quad a_{i+1}^{(k)} a_p^{(k)} = \sum_{j=1}^p a_{i+1,j}^{(k)} a_{pj}^{(k)} \quad (p=1, 2, \dots, i),$$

és (5.11) alapján ilyen p indexekre $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{i+1}^{(k)} a_p^{(k)} = 0$, ezért az (5.12) összefüggést a $p=1, 2, \dots, i$ indexekre egymásután alkalmazva

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_{i+1,p}^{(k)} = 0 \quad (p=1, \dots, i)$$

adódik. Ezért, és mivel szintén csak 5.11 miatt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_{i+1}^{(k)} a_{i+1}^{(k)} = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{i+1} a_{i+1,j}^{(k)2} = s_{i+1}^2,$$

ebből $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{i+1,i+1}^{(k)} = s_{i+1}$ következik, (hiszen az $A^{(k)}$ mátrixok diagonális elemei nem-negativak).

Ha $r < m$, akkor az $i \in \{r+1, \dots, m\}$ indexekre az $a_{ij}^{(k)}$ ($j=1, \dots, r-1$) elemek zérushoz való tartása következik a

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_i^{(k)} a_p^{(k)} = 0 \quad (p=1, \dots, r) \text{ összefüggésekből, de mivel}$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_{qq}^{(k)} = 0 \quad (q=r+1, \dots, i-1), \text{ ebből } \lim_{k \rightarrow \infty} a_{ij}^{(k)} = 0 \text{ nem következik a } j=r, \dots, i-1 \text{ indexekre. Viszont}$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_i^{(k)T} a_i^{(k)} = 0, \text{ hiszen } s_i^2 = 0 \quad (i > r), \text{ így } \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^i a_{ij}^{(k)2} = 0,$$

amiből $\lim_{k \rightarrow \infty} a_i^{(k)} = 0$ már következik. Azaz, ha S utolsó $m-r$ diagonális eleme zérus, akkor $A^{(k)}$ utolsó $m-r$ sora is zérushoz konvergál. Tehát az algoritmusban a QR-felbontásokat a Gram-Schmidt-ortogonalizáció szerint végezve itt is igaz a QRPS-al-

goritmusnál említett egyértelműség.

Az eredeti QRPS-algoritmusnál adott geometriai szemléltetés itt is elvégezhető: az E_n ill. E_m térben sorozatos bázistranszformációkat végrehajtva a két tér bázisai az 5.2. tétel alapján itt is a saját bázispárhoz konvergálnak. Itt a bázistranszformáció azonban kétszer olyan gyors, mint a QRPS-algoritmusnál, hiszen mihelyt az egyik térben felvettünk egy új bázist, az leképezés mátrixát rögtön ebben tekintjük.

Megjegyzem, hogy az $A^{(k)}$ mátrixok ($k=0,1,2,\dots$) QR-felbontását természetesen nem a Gram-Schmidt-féle ortogonalizációval végezzük, hanem oszloponként elemi forgatásokkal tüntetjük el az $A^{(k)}$ mátrixok diagonális alatti elemeit, miáltal azok fokozatosan felső háromszög alakúvá válnak.

Tekintsük csak az első lépést. Azaz, ha $A = (a_{ij})_{i=1,j=1}^{m,n}$ valós mátrix, akkor a QR-felbontásában szereplő $m \times m$ -es ortogonális mátrix a következő:

$$(5.13) \quad \begin{matrix} m < n \text{ esetben:} \\ Q = \prod_{i=1}^{m-1} \prod_{j=i+1}^m P_{m+i+1-j,i} \end{matrix}$$

$$m > n \text{ esetben:} \quad Q = \prod_{j=1}^n \prod_{i=j+1}^m P_{m+i+1-j,i}$$

ahol

$$(5.14) \quad P_{ji} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & \cos \vartheta_{ji} & & -\sin \vartheta_{ji} & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 1 \\ & & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

$i. \qquad \qquad \qquad j.$

$$\operatorname{tg} \vartheta_{ji} = \frac{a_{ji}^*}{a_{ii}^*}$$

(*-gal mindig a produktum megelőző tagjával transzformált mátrix elemeit jelöljük).

Ha a QR-felbontás egyértelműségére tett feltételek is teljesülnek, akkor ez az eljárás a Schmidt-ortogonalizációjával azonos eredményt adja és annál sokkal gyorsabb. A 2.a. tétel bizonyításában tett feltételek teljesülnek, ha az input A mátrix oszlopait úgy rendezzük át, hogy vesszük az első nem-zérus oszlopot, majd mindig a legkisebb indexű olyat, amely az előzőektől lineárisan független. A kimaradó oszlopokat tetszős szerint vehetjük sorba (mondjuk természetes sorrendjükben), hisz ezek az $\text{Im}(A)^\perp$ altérben helyezkednek el, így a bennük lévő nemkívánatos elemeket eltüntető elemi forgatások is az $\text{Im}(A)^\perp$ altérben forgatnak, és láttuk hogy a Q mátrixnak az ebbe az altérbe eső oszlopai is tetszőlegesen elforgathatók.

A fenti átrendezést a sorozat többi tagjára is el kell végezni, ez azonban nagyon egyszerű, mert az $A^{(k)}$ mátrixok ($k=1,2,\dots$) alsó triangulárisak. Így, ha az i -edik oszloppal bezárólag az oszlopokat már így vettük sorba, akkor az $(i+1)$ -edik oszlop pontosan akkor lineárisan független az öt megelőzőektől, ha az addig átrendezett $A^{(k)}$ mátrix i -edik diagonális eleme nem-zérus. Ezt kell tehát csak ellenőrizni az (5.13) formulák külső produktumában minden i -re, és zérus diagonális elem esetén az $A^{(k)}$ mátrix következő oszlopát venni. (Ekkor a (5.14) formulában szereplő szögek is mindig kiszámolhatók.)

b/ AZ SVD-ALGORITMUS (Golub és Reinsch, 1970)

Az ismertetésre kerülő algoritmus jól bevált valós téglalap-mátrixok szinguláris felbontására. A mátrix előzetes bidiagonális transzformációja miatt azonban a későbbi transzformációk geometriai jelentése nem követhető úgy nyomon, mint a QRPS-transzformációnál. A módszer részletes leírását ld. [8]-ban.

Legyen A $m \times n$ -es valós mátrix ($m \geq n$ feltehető). Ezt először felső bidiagonális alakra hozzuk (azaz nem-zérus elemek csak a fődiagonálisban és közvetlenül felette állnak) a következő ortogonális transzformációkkal:

$$P^{(n)} \dots P^{(1)} A Q^{(1)} \dots Q^{(n-2)} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} q_1 & e_2 & & & & \\ & q_2 & \ddots & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & e_n & & \\ & & & & q_n & \\ \hline & & & & & \end{array} \right] \begin{array}{l} \left. \vphantom{\begin{matrix} q_1 \\ e_2 \\ q_2 \\ \ddots \\ e_n \\ q_n \end{matrix}} \right\} n \\ \left. \vphantom{\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}} \right\} m-n \end{array}$$

$$P^{(k)} = I_m - 2 \frac{\underline{x}^{(k)} \underline{x}^{(k)T}}{\underline{x}^{(k)T} \underline{x}^{(k)}} \quad (k=1, \dots, n),$$

ahol

$$Q^{(k)} = I_n - 2 \frac{\underline{y}^{(k)} \underline{y}^{(k)T}}{\underline{y}^{(k)T} \underline{y}^{(k)}} \quad (k=1, \dots, n-2),$$

az $\underline{x}^{(k)} \in E_m$ ill. $\underline{y}^{(k)} \in E_n$ normálisu síkokra való tükrözések. Az $\underline{x}^{(k)}, \underline{y}^{(k)}$ vektorok megválaszthatók úgy, hogy a transzformált mátrix az első k oszlopot ill. sort tekintve a fenti alakú legyen. A kapott mátrix tehát bidiagonális és szinguláris értékei az A mátrix szinguláris értékeivel egyeznek meg, szinguláris felbontásának ortogonális mátrixai pedig az öt bidiagonális alakra hozó ortogonális transzformációk transzponáltjával való visszaszorzás útján nyerhetők, hisz hasonlósági transzformációkat hajtottunk végre rajta. A továbbiakban az A mátrixról felteesszük, hogy már felső bidiagonális alakra hoztuk. Képezzük a következő sorozatot:

$$A^{(0)} = A, \dots, A^{(i)} = S^{(i-1)T} A^{(i-1)} T^{(i-1)} \quad (i=1, 2, \dots),$$

ahol az $S^{(i)}$ ill. $T^{(i)}$ ortogonális mátrixok $n-1$ db. elemi forgatásból állnak össze úgy, hogy

$$A \rightarrow A^{(1)} \rightarrow A^{(2)} \rightarrow \dots \rightarrow A^{(i)} \rightarrow A^{(i+1)} \rightarrow \dots$$

eltolásos QR-sorozat. Hogyan kell ehhez az $S^{(i)}$ és $T^{(i)}$ mátrixokat megválasztani?

Tekintsük csak az első lépést. Jelölje $\bar{A} = A^{(1)}$, $S = S^{(0)}$, $T = T^{(0)}$. Legyen

$$S = S_2 S_3 \dots S_n, \quad T = T_2 T_3 \dots T_n,$$

ahol

$$S_k = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} k-1. \\ k. \end{matrix} \quad m \times m\text{-es},$$

$$T_k = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} k-1. \\ k. \end{matrix} \quad n \times n\text{-es},$$

mátrixok ($k=2, \dots, n$).

Legyen φ_2 egyelőre tetszőleges. A szögeket $\vartheta_2, \varphi_3, \vartheta_3, \dots, \varphi_n, \vartheta_n$ sorrendben választjuk meg, pusztán arra ügyelve, hogy az $S, A, T = \bar{A}$ mátrix is felső bidiagonális maradjon. Mivel

$$A T_2 = \begin{bmatrix} q_1 & \cos \varphi_2 + e_2 \sin \varphi_2 & -q_1 \sin \varphi_2 + e_2 \cos \varphi_2 & 0 & & \\ & q_2 \sin \varphi_2 & q_2 \cos \varphi_2 & e_3 & & \\ & 0 & 0 & q_3 & \ddots & \\ & \vdots & \vdots & \ddots & e_n & \\ & 0 & 0 & & q_n & \end{bmatrix},$$

ϑ_2 -t úgy választjuk, hogy az $S_2' A T_2$ mátrixban a diagonális alatti zérus elemek álljanak, azaz

$$(5.15) \quad \operatorname{tg} \vartheta_2 = \frac{q_2 \sin \varphi_2}{q_1 \cos \varphi_2 + e_2 \sin \varphi_2}.$$

ϑ_2 választása miatt

$$S_2' A T_2 = \begin{bmatrix} \cos \vartheta_2 (q_1 \cos \varphi_2 + e_2 \sin \varphi_2) & \cos \vartheta_2 (-q_1 \sin \varphi_2 + e_2 \cos \varphi_2) & & & \\ + \sin \vartheta_2 q_2 \sin \varphi_2 & + \sin \vartheta_2 (q_2 \cos \varphi_2) & e_3 \sin \vartheta_2 & & \\ 0 & -\sin \vartheta_2 (-q_1 \sin \varphi_2 + e_2 \cos \varphi_2) & e_3 \cos \vartheta_2 & & \\ \vdots & + \cos \vartheta_2 (q_2 \cos \varphi_2) & & & \\ 0 & & & \begin{matrix} q_3 & e_4 \\ & \ddots \\ & e_n \\ & q_n \end{matrix} \end{bmatrix}$$

Ezután φ_3 -at úgy választjuk meg, hogy $S_2' A T_2 T_3$ -ban az első sor harmadik eleme zérus legyen, azaz

$$(5.16) \quad \operatorname{tg} \varphi_3 = \frac{e_3 \sin \vartheta_2}{\cos \vartheta_2 (-q_1 \sin \varphi_2 + e_2 \cos \varphi_2) + \sin \vartheta_2 q_2 \cos \varphi_2}.$$

...s.i.t. S_i eltünteti az $(i, i-1)$ pozícióbeli elemet, de az $(i-1, i+1)$ pozícióban egy nemkívánatos elemet hoz be, amit T_{i+1} tüntet el ($i=2, \dots, n-1$). Végül S_n eltünteti az $(n, n-1)$ pozícióban álló elemet és csak e_n -t változtatja meg. Vegyük észre, hogy T_i csak az $i-1$ és i -edik sorban és oszlopban, míg S_i az $i-1$ és i -edik sorban, ill. az $i-1, i, i+1$ -edik oszlopban okoz változást ($i=2, \dots, n-1$).

Mos megválasztjuk a φ_2 szöget úgy, hogy $A' A \rightarrow \tilde{A}' \tilde{A}$ egy eltolásos QR-algoritmus első lépése legyen. A feltételeket, melyeknek ehhez teljesülni kell, a következő (Francistól származó) lemmából olvashatjuk ki:

5.1. Lemma: Legyen az M szimmetrikus, tridiagonális mátrix (azaz nem-zérus elemek csak a fődiagonálisban és közvetlenül alatta ill. felette találhatók) tetszőleges, de most rögzített b valós számmal képzett eltolásos QR-transzformáltja M_b . (Azaz, ha az $M - bI$ mátrix QR-belbontása $Q_b R_b$, akkor

$$M_b = R_b Q_b + bI = Q_b^T M Q_b \text{ .) }$$

Legyen T tetszőleges olyan ortogonális mátrix, melynek első oszlopa megegyezik Q_b első oszlopával és amelyre $T^T M T$ szintén tridiagonális. Ekkor van olyan D diagonális mátrix, diagonálisában ± 1 -ekkel, hogy

$$T = Q_b D.$$

Bizonyítás: Tekintsük azokat a $T = (\underline{t}_1 \underline{t}_2 \dots \underline{t}_n)$ ortogonális mátrixokat, melyeknek első oszlopa, \underline{t}_1 egyelőre tetszőlegesen rögzített és melyekre a

$$T^T M T = \tilde{M} = (\tilde{m}_{ij})_{i,j=1}^n$$

mátrix tridiagonális. Belátjuk, hogy ekkor $\underline{t}_2, \dots, \underline{t}_n$ előjeltől eltekintve egyértelműen meghatározott, vagyis az ilyen tulajdonságú mátrixok egy, a megfelelő előjeleket tartalmazó diagonális mátrixszal való szorzás útján kaphatók egymásból. Mivel T ortogonális,

$$(5.17) \quad M T = T \tilde{M}.$$

A két oldalon az első oszlopokat egyenlővé téve

$$M \underline{t}_1 = \tilde{m}_{11} \underline{t}_1 + \tilde{m}_{21} \underline{t}_2$$

adódik. Ebből, mivel $\underline{t}_1, \dots, \underline{t}_n$ ortonormált rendszer,

$$(5.18) \quad \underline{t}_1^T M \underline{t}_1 = \tilde{m}_{11}$$

és

$$(5.19) \quad \tilde{m}_{21} \underline{t}_2 = M \underline{t}_1 - \tilde{m}_{11} \underline{t}_1 .$$

amiből $|\tilde{m}_{21}| = \|M \underline{t}_1 - \tilde{m}_{11} \underline{t}_1\|$ a T mátrix fenti választása mellett konstans. Így (5.19) miatt \underline{t}_2 egy ± 1 -es szorzótól eltekintve egyértelműen meghatározott. Most (5.17) két oldalán a második oszlopokat egyenlővé téve, M tridiagonalitása miatt

$$M \underline{t}_2 = \tilde{m}_{12} \underline{t}_1 + \tilde{m}_{22} \underline{t}_2 + \tilde{m}_{32} \underline{t}_3$$

és, mivel T ortogonális,

$$(5.20) \quad \tilde{m}_{12} = \underline{t}_1' M \underline{t}_2 ,$$

$$(5.21) \quad \tilde{m}_{22} = \underline{t}_2' M \underline{t}_2 ,$$

$$(5.22) \quad \tilde{m}_{32} \underline{t}_3 = M \underline{t}_2 - \tilde{m}_{12} \underline{t}_1 - \tilde{m}_{22} \underline{t}_2 ,$$

melyekből $|\tilde{m}_{32}| = \|M \underline{t}_2 - \tilde{m}_{12} \underline{t}_1 - \tilde{m}_{22} \underline{t}_2\|$ a T mátrix fenti választása mellett konstans. Így (5.22) miatt \underline{t}_3 is ± 1 -es szorzótól eltekintve egyértelműen meghatározott. Hasonlóan látható be az állítás $\underline{t}_4, \dots, \underline{t}_n$ -re is.

Legyen most \underline{t}_1 a Q_b mátrix első oszlopa. Már csak azt kell megmutatni, hogy $M_b = Q_b' M Q_b$ is tridiagonális, hiszen akkor az előbbieket alapján a tétel állításában szereplő T mátrix $Q_b D$ alakban áll elő.

Ugyanis az $M - bI = Q_b R_b$ szimmetrikus, tridiagonális mátrix QR-felbontásában szereplő Q_b mátrix az előző fejezet végén mondottak alapján előállítható $n-1$ db. elemi forgatás szorzataként, melyek a diagonális alatti elemeket tüntetik el. Pl.

$Q_b = F_1 \dots F_{n-1}$, ahol F_i az $(i, i+1)$ koordináták síkjában forgat $(i=1, \dots, n-1)$. Akkor

$$(5.23) \quad Q_b' M Q_b = F_{n-1}' \dots \underbrace{F_2' F_1' M F_1 F_2}_{\vdots} \dots F_{n-1} .$$

Könnyen látható, hogy M szimmetrikus volta miatt a kapcsos zárójelekben álló mátrixok tridiagonálisak maradnak (ui. elemi forgatásokat hajtottunk végre rajtuk, mindig a megfelelő helyen, két szomszédos koordináta síkjában). Ez ugy is fogalmazható, hogy szimmetrikus, tridiagonális mátrix alakja QR-transzformációval szemben invariáns. Ezzel a tétel bizonyítását befejeztük.

Az eredeti feladatban φ_2 választására visszatérve, legyen b tetszőleges ($b \neq q_1^2$) valós szám, jelölje M az $A' A$ szimmetrikus, tridiagonális mátrixot, M_b pedig ennek a b valós számmal képzett eltolásos QR-transzformáltját (az előbbiek miatt a M_b mátrix is tridiagonális).

Mivel M tridiagonális, φ_2 megválasztható úgy, hogy T_2 első oszlopa $M-bI$ első oszlopának legyen skalárszorosa:

$$(5.24) \quad \operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{q_1 e_2}{q_1^2 - b}.$$

Mivel a T_3, \dots, T_n mátrixok definíciójuknál fogva $M-bI$ első oszlopát már nem változtatják meg így $T = T_2 \dots T_n$ első oszlopa is $M-bI$ első oszlopának skalárszorosa. De $M-bI = Q_b R_b$ miatt ez skalárszorosa Q_b első oszlopának is (mivel a Gram-Schmidt-ortogonalizáció szerint ez az $M-bI$ tridiagonális mátrix első oszlopának normáltja).

A bidiagonalitása miatt (ezt csak a $\vartheta_2, \varphi_3, \vartheta_3, \dots, \varphi_n, \vartheta_n$ szögek választásával értük el),

$$\bar{A}' \bar{A} = T' A' A T = T' M T$$

is tridiagonális. Az 5.1. lemma alkalmazásával $T = Q_b D$, ahol D diagonális mátrix diagonálisában ± 1 -ekkel. Az $M-bI$ mátrix QR-felbontásában Q_b oszlopaait megfelelően előjelezve $T = Q_b$, azaz $\bar{A}' \bar{A} = M_b$. Így $A' A \rightarrow \bar{A}' \bar{A}$ valóban egy eltolásos QR-algoritmus első lépése, ahol az eltolás b paraméterének értékére tetszőleges, q_1^2 -től különböző valós számot választhatunk. Wilkinson [14] megmutatta, hogy a konvergencia akkor a leggyorsabb, ha b az M mátrix alsó 2×2 -es sarokminorának a kisebbik sajátértéke. Ezen alapszik a [8]-ban leírt program is.

c/ A QPRS- ÉS SVD-ALGORITMUS ÖSSZEHA-SONLITÁSA

Tegyük fel, hogy az A $m \times n$ -es valós mátrixot már felső bidiagonalis alakra hoztuk. Erre alkalmazzuk a QRPS-algoritmust.

Mivel A egyben felső trianguláris is, QR-felbontása $I_m A$. Legyen az A' mátrix QR-felbontása $P S$, ahol a P $n \times n$ -es ortogonális mátrix A sorait ortogonalizálja, S pedig $n \times m$ -es felső trianguláris mátrix. A sorozat képzési szabálya szerint $A^{(1)} = AP$, melynek QR-felbontását jelölje $Q R$, ahol a Q $m \times m$ -es ortogonális mátrix A P oszlopait ortogonalizálja, R pedig $m \times n$ -es felső tri-diagonalis alakú. $A^{(1)'} = S I_n$, melynek QR-felbontása $I_m S$, így

$$(5.25) \quad A^{(2)} = Q' A P.$$

Az 5.2. lemma szerint a $A' A \rightarrow A^{(2)'} A^{(2)}$ hozzárendelés QR-transzformáció.

A P és Q mátrixokat most nem A' , majd A P oszlopainak ortogonalizálásával állítjuk elő, hanem elemi forgatások szorzataként. Ha az oszlopokat itt is a Gram-Schmidt-ortogonalizációval szokásos módon vesszük sorba, akkor a P és Q mátrixok egyértelművé tehetők az első r oszlopot tekintve, ahol $r = rang(A)$. Mivel A' és $A P$ alsó- ill. felső bidiagonalis alakú, az oszlopok lineáris függetlenségének ellenőrzése nagyon egyszerű. Felső bidiagonalis mátrixoknál ugyanis az i -edik oszlop lineárisan függ az előzőektől, ha $q_i = 0$, alsó bidiagonalis mátrixoknál pedig, ha $e_{i+1} = 0$. Ilyen esetekben azonban mátrixunk két alacsonyabb rendű mátrixra hasítható szét (melyek felső- és alsó, ill. alsó- és felső bidiagonalis alakúak), és melyek szinguláris értékeit külön-külön meghatározva az eredeti mátrix szinguláris értékeit kapjuk.

Feltehető tehát, hogy az oszlopok lineárisan függetlenek. Ekkor az elemi forgatások leírása a következő:

Legyen $P = P_2 P_3 \dots P_n$, ahol

$$P' A' = \begin{bmatrix} q_1 \cos \varphi_2 & q_2 \sin \varphi_2 & & & \\ +e_2 \sin \varphi_2 & & & & \\ & q_3 \cos \varphi_2 \cos \varphi_3 & q_3 \sin \varphi_3 & & \\ & +e_3 \sin \varphi_3 & & & \\ & & q_3 \cos \varphi_3 \cos \varphi_4 & & \\ & & +e_4 \sin \varphi_4 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & q_{n-1} \sin \varphi_{n-1} \\ & & & & & q_{n-1} \cos \varphi_{n-1} \cos \varphi_n \\ & & & & & +e_n \sin \varphi_n \\ & & & & & & q_n \sin \varphi_n \\ & & & & & & & q_n \cos \varphi_n \end{bmatrix}$$

Ezután legyen $Q = Q_2 Q_3 \dots Q_n$, ahol

$$Q_i = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \cos \vartheta_i & -\sin \vartheta_i \\ & & & \sin \vartheta_i & \cos \vartheta_i \\ & & & & & 1 & & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} i-1. \\ i. \\ i-1. \\ i. \end{matrix}$$

(A Q_i ill. P_i mátrixok $m \times m$ - ill. $n \times n$ -esek.)

Mivel $A P = (P' A')'$, ezért $A P$ alsó bidiagonális alakú, és az $(i-1)$ -edik diagonális alatti elemet eltüntető Q_i mátrixot az előbbiekhöz hasonlóan választjuk meg. Kis számolás után:

$$tg\vartheta_2 = \frac{q_2 \sin\varphi_2}{q_1 \cos\varphi_2 + e_2 \sin\varphi_2} \quad ,$$

(5.27)

$$tg\vartheta_i = \frac{q_i \sin\varphi_i}{(q_{i-1} \cos\varphi_{i-1} \cos\varphi_i + e_i \sin\varphi_i) \cos\vartheta_{i-1}}$$

($i=3, 4, \dots, n$).

Szintén látható, hogy Q_i az első $i-1$ oszlop zérusait már nem változtatja ($i=3, 4, \dots, n$).

Láttuk, hogy mind $A' A \rightarrow \tilde{A}' \tilde{A}$, mind $A' A \rightarrow A^{(2)'} A^{(2)}$ az $A' A$ szimmetrikus mátrixon végrehajtott eltolásos- ill. közösleges QR-transzformáció. A Gram-Schmidt-ortogonalizáció konstrukciójából következik, hogy megfelelő feltételek mellett a transzformációs mátrixok is megegyeznek, pontosabban a következő igaz:

5.3. Tétel: Ha az A $m \times n$ -es valós mátrix rangja $\min\{m, n\}$, akkor a Golub-féle nem eltolásos SVD-algoritmus és a bidiagonális mátrixokra előbb ismertetett QRPS-algoritmus elemi forgatásmátrixaira az előbbi jelölésekkel:

$$T_i = P_i \quad \text{és} \quad S_i = Q_i \quad (i=2, 3, \dots, n).$$

Bizonyítás: A (4.10) képlet alapján, ha $b=0$ értéket választunk,

$tg\vartheta_2 = \frac{e_2}{q_1}$ adódik, ami éppen a P_2 -beli forgatás szöge, tehát $T_2 = P_2$. Az (5.15) képlet alapján S_2 -t épp úgy fejezhetjük ki φ_2 -vel, mint Q_2 -t. Ez nem meglepő, hisz Q_2 az A P mátrix első oszlopát ortogonalizálja, az viszont csak P_2 -től függ. Így $S_2 = Q_2$.

T_3 esetében φ_3 közvetlenül φ_2 függvénye, hisz először a P_i ($i=2, \dots, n$) transzformációkat választjuk meg. Az SVD-algoritmusban S_i -ket és T_i -ket váltakozva határozzuk meg. Az (5.16) képletben $\cos\vartheta_2$ -vel leosztva, és $tg\vartheta_2$ -re az (5.15) kifejezést behelyettesítve:

$$\operatorname{tg} \varphi_3 = \frac{e_3 \operatorname{tg} \vartheta_2}{-q_1 \sin \varphi_2 + e_2 \cos \varphi_2 + \operatorname{tg} \vartheta_2 q_2 \cos \varphi_2}.$$

φ_2 választása miatt azonban $-q_1 \sin \varphi_2 + e_2 \cos \varphi_2 = 0$, így $\operatorname{tg} \vartheta_2$ -vel leosztva:

$$\operatorname{tg} \varphi_3 = \frac{e_3}{q_2 \cos \varphi_2}$$

adódik, ami megegyezik az (5.16) képletben $\operatorname{tg} \vartheta_3$ értékével. Így $T_3 = P_3 \dots$ s. i. t. $T_i = P_i$ ($i=2, \dots, n$).

Az $S_i = Q_i$ egyenlőségek közvetlenül a megfelelő képletek összehasonlításával láthatók, hisz a Q_i mátrixokban ϑ_i épp úgy függ a $\varphi_2, \dots, \varphi_{i-1}$ ($i=3, \dots, n$) szögektől, mint az S_i mátrixokban ($i=3, \dots, n$). A $T_i = P_i$ egyenlőségek kis számolással nyerhetők (a T_i mátrixokban a φ_i szög ϑ_{i-1} -gyel van kifejezve, ez viszont felírható φ_{i-1} -gyel). Ezzel a tételt beláttuk.

A QRPS-algoritmus gyorsított változatát alkalmazva is ugyanezeket a lépéseket kapjuk:

Mivel az A $m \times n$ -es felső bidiagonális mátrix QR-felbontása $I_m A$, az A' mátrix QR-felbontása pedig $P S$, ezért itt is $A^{(1)} = S' = A P$. Ha az $A^{(1)}$ mátrix QR-felbontása $Q R$, akkor $R = Q' A^{(1)} = Q' A P$, ami épp az (5.25) összefüggésben szereplő mátrix. Itt azonban még az R' mátrix QR-felbontását is el kell végezni. Legyen ez $P^{(1)} S^{(1)}$, amiből $A^{(2)} = S^{(1)'} = R P^{(1)} = Q' A P P^{(1)}$, ahol $P^{(1)}$ épp az (5.25)-beli mátrix sorait ortogonalizálja, azaz az előbb ismertetett algoritmus következő lépését adja.

Tehát ugyanazokat a forgatásokat kell itt is elvégeznünk, mint az eredeti QRPS-algoritmusban bidiagonális mátrixok esetén, csak itt $A^{(2)}$ épp az ottani $A^{(1)}$ -nek felel meg. Ez érthető is, hisz tetszőleges mátrixra alkalmazva a QRPS-algoritmust ill. annak gyorsított változatát, utóbbinál $A^{(k)} A^{(k)'} (k=1, 2, \dots)$ adta az $A A'$ mátrix közös QR-sorozatát, míg előbbinél $A^{(2k)} A^{(2k)'} (k=1, 2, \dots)$. Azaz a közös QRPS-algoritmusban két lépést elvégezve, majd a kapott mátrixot saját transzponált-

jával megszorozva, ennek a mátrixnak $L L'$ alakban való előállítása (ahol L alsó trianguláris mátrix) adja a gyorsított algoritmus egy lépését, hisz ott a sorozat tagjai alsó triangulárisak. (Megjegyezzük, hogy az $L L'$ alakban való előállítás szimmetrikus, pozitív szemidefinit mátrixokra egyértelmű, ha még azt is tudjuk, hogy az L alsó trianguláris mátrix diagonális elemei nem-negativak).

Általános téglalapmátrixok esetén az SVD eljárás a mátrixot először bidiagonális alakra hozza. A QRPS-algoritmus közvetlenül alkalmazható tetszőleges téglalapmátrixra, bidiagonális mátrixokra láttuk, hogy bizonyos megszorítások mellett ugyanazokat a lépéseket adja.

A QRPS-algoritmus gyorsított változatára a függelék f. az SVD-algoritmusra pedig a függelék e. részében ALGOL nyelven írt számítógépes program található (a programot az MTA CDC 3300-as gépén futtatuk).

A QRPS- és az SVD-eljárás konvergenciájának gyorsasága megegyezik a közönséges- és az eltolásos QR-algoritmus gyorsaságával (a QRPS gyorsított változatában a lépésszám feleannyi), hisz a konvergenciabizonyításokban ilyenekre vezettük őket vissza. Wilkinson [14] megmutatta, hogy a közönséges QR-algoritmus globálisan konvergens és asszimptotikusan majdnem mindig harmadrendű a konvergenciája, míg az eltolásos QR-algoritmus konvergenciája az eltolás megfelelő választása mellett globálisan harmadrendű. Ez azt jelenti, hogy ha a szinguláris értékek jól elkülönülnek, a két módszer gyorsaságában gyakorlatilag nincs nagy különbség.

IRODALOMJEGYZÉK

- [1] Björck, A. and Golub, G.H., "Numerical methods for computing angles between linear subspaces", Math. of Computation 27 /1973/ 597-594.
- [2] Bolla, M. "A QR-algoritmus általánosítása valós téglalapmátrixok szinguláris felbontására", Alk. Mat. Lapok 8 /1982/, 125-139.
- [3] Bolla, M. "Mátrixok szinguláris felbontásának módszerei és statisztikai alkalmazásai", SZTAKI WP. MS/11. /1983/.
- [4] Farrell, R.H., "Techniques of Multivariate Calculation", Lecture Notes in Mathematics, Berlin. Heidelberg. New York, Springer-Verlag, 1976.
- [5] Forsythe, G.E. and Moler, C.B., "Computer Solution of Linear Algebraic Systems", Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliff, N.J., 1967.
- [6] Francis, J., "The QR transformation. A unitary analogue to the LR transformation I.II.", Comput.J.4 /1961-62/ 265-271 and 332-345.
- [7] Golub, G.H. and Kahan, W., "Calculating the singular values and pseudoinverse of a matrix", J.SIAM Numer. Anal.Ser.B 2 /1965/ 205-224.
- [8] Golub, G.H. and Reinsch, C., "Singular values decompositions and least squares solutions", Numer. Math. 14 /1970/ 403-420.
- [9] Golub, G.H. and Wilkinson, J.H., "Ill-conditioned eigen-systems and the computation of the Jordan canonical form", STAN-CS-75-478, February 1975.
- [10] Lengyel, T., "A kanonikus korrelációanalízis és néhány kapcsolódó probléma", Alk.Mat.Lapok 5 /1979/ 385-393

- [11] Rózsa, P., "Lineáris algebra és alkalmazásai", Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1976.
- [12] Tusnády, G., "Mátrixok szinguláris felbontása", Alk. Mat. Lapok 5 /1979/ 375-384.
- [13] Tusnády, G. "Keverékek felbontása", Mat. Lapok, 1982 /megjelenés alatt/
- [14] Wilkinson, J.H., "The algebraic eigenvalue problem", Clarendon Press. Oxford, 1965.

FÜGGELÉK / A


```
LN 0001      SUBROUTINE MISES(N,A,X,E,DELTA,EPS)
LN 0002      DIMENSION A(N,N),X(N),U(100)
LN 0003      V=0.0
LN 0004      11 IND=1
LN 0005      S=ABS(X(1))
LN 0006      DO 2 I=2,N
LN 0007      R=ABS(X(I))
LN 0008      IF (R-S) 2,2,3
LN 0009      3 IND=I
LN 0010      S=R
LN 0011      2 CONTINUE
LN 0012      IF (S-DELTA) 4,5,5
LN 0013      4 PRINT 6
LN 0014      6 FORMAT (2X,'THE METHOD CAN NOT BE USED*')
LN 0015      STOP
LN 0016      5 DO 7 I=1,N
LN 0017      7 X(I)=X(I)/S
LN 0018      DO 8 J=1,N
LN 0019      U(J)=0.0
LN 0020      DO 8 J=1,N
LN 0021      8 U(J)=U(J)+A(I,J)*X(J)
LN 0022      E=U(IND)/X(IND)
LN 0023      IF (ABS(E-V)-EPS) 9,10,10
LN 0024      9 V=E
LN 0025      DO 13 I=1,N
LN 0026      13 X(I)=U(I)
LN 0027      GO TO 11
LN 0028      9 CONTINUE
LN 0029      RETURN
LN 0030      END
LN 0031
```

USASI FORTRAN DIAGNOSTIC RESULTS FOR MISES

NO ERRORS

FÜGGELÉK/B

.....	EIGE 20
SUBROUTINE EIGEN	EIGE 30
	EIGE 40
PURPOSE	EIGE 50
COMPUTE EIGENVALUES AND EIGENVECTORS OF A REAL SYMMETRIC	EIGE 60
MATRIX	EIGE 70
	EIGE 80
	EIGE 90
USAGE	EIGE 100
CALL EIGEN(A,R,N,MV)	EIGE 110
	EIGE 120
DESCRIPTION OF PARAMETERS	EIGE 130
A - ORIGINAL MATRIX (SYMMETRIC), DESTROYED IN COMPUTATION.	EIGE 140
RESULTANT EIGENVALUES ARE DEVELOPED IN DIAGONAL OF	EIGE 150
MATRIX A IN DESCENDING ORDER.	EIGE 160
R - RESULTANT MATRIX OF EIGENVECTORS (STORED COLUMNWISE,	EIGE 170
IN SAME SEQUENCE AS EIGENVALUES)	EIGE 180
N - ORDER OF MATRICES A AND R	EIGE 190
MV- INPUT CODE	EIGE 200
0 COMPUTE EIGENVALUES AND EIGENVECTORS	EIGE 210
1 COMPUTE EIGENVALUES ONLY (R NEED NOT BE	EIGE 220
DIMENSIONED BUT MUST STILL APPEAR IN CALLING	EIGE 230
SEQUENCE)	EIGE 240
	EIGE 250
REMARKS	EIGE 260
ORIGINAL MATRIX A MUST BE REAL SYMMETRIC (STORAGE MODE=1)	EIGE 270
MATRIX A CANNOT BE IN THE SAME LOCATION AS MATRIX R	EIGE 280
	EIGE 290
SUBROUTINES AND FUNCTION SUBPROGRAMS REQUIRED	EIGE 300
NONE	EIGE 310
	EIGE 320
METHOD	EIGE 330
DIAGONALIZATION METHOD ORIGINATED BY JACOBI AND ADAPTED	EIGE 340
BY VON NEUMANN FOR LARGE COMPUTERS AS FOUND IN 'MATHEMATICAL	EIGE 350
METHODS FOR DIGITAL COMPUTERS', EDITED BY A. RALSTON AND	EIGE 360
H.S. WILF, JOHN WILEY AND SONS, NEW YORK, 1962, CHAPTER 7	EIGE 370
	EIGE 380
.....	EIGE 390
SUBROUTINE EIGEN(A,R,N,MV)	EIGE 400
DIMENSION A(1),R(1)	EIGE 410
	EIGE 420
	EIGE 430
.....	EIGE 440
	EIGE 450
IF A DOUBLE PRECISION VERSION OF THIS ROUTINE IS DESIRED, THE	EIGE 460
C IN COLUMN 1 SHOULD BE REMOVED FROM THE DOUBLE PRECISION	EIGE 470
STATEMENT WHICH FOLLOWS.	EIGE 480
	EIGE 490
DOUBLE PRECISION A,R,ANORM,ANEMX,TRP,X,Y,SINX,SINX2,COSX,	EIGE 500
1 COSX2,SINCS,RANGE	EIGE 510
	EIGE 520
THE C MUST ALSO BE REMOVED FROM DOUBLE PRECISION STATEMENTS	EIGE 530
APPEARING IN OTHER ROUTINES USED IN CONJUNCTION WITH THIS	EIGE 540
ROUTINE.	EIGE 550
	EIGE 560
THE DOUBLE PRECISION VERSION OF THIS SUBROUTINE MUST ALSO	EIGE 570

C	CONTAIN DOUBLE PRECISION FORTRAN FUNCTIONS. SORT IN STATEMENT	EICE 580
C	40, 68, 75, AND 78 MUST BE CHANGED TO DSQRT. ABS IN STATEMENT	EICE 590
C	62 MUST BE CHANGED TO DABS. THE CONSTANT IN STATEMENT 5 SHOULD	EICE 600
C	BE CHANGED TO 1.00-12.	EICE 610
C		EICE 620
C	EICE 630
C		EICE 640
C	GENERATE IDENTITY MATRIX	EICE 650
C		EICE 660
5	RANGE=1.0E-6	EICE 670
	IF(MV-1) 10,25,1)	EICE 680
10	IQ=-N	EICE 690
	DO 20 J=1,N	EICE 700
	IQ=IQ+N	EICE 710
	DO 20 I=1,N	EICE 720
	IJ=IQ+I	EICE 730
	R(IJ)=0.0	EICE 740
	IF(I-J) 20,15,20	EICE 750
15	R(IJ)=1.0	EICE 760
20	CONTINUE	EICE 770
C		EICE 780
C	COMPUTE INITIAL AND FINAL NORMS (ANORM AND ANRMX)	EICE 790
C		EICE 800
25	ANORM=0.0	EICE 810
	DO 35 I=1,N	EICE 820
	DO 35 J=I,N	EICE 830
	IF(I-J) 30,35,30	EICE 840
30	IA=1+(J*J-I)/2	EICE 850
	ANORM=ANORM+A(IA)*A(IA)	EICE 860
35	CONTINUE	EICE 870
	IF(ANORM) 165,165,40	EICE 880
40	ANORM=1.414*SQRT(ANORM)	EICE 890
	ANRMX=ANORM*RANGE/FLOAT(N)	EICE 900
C		EICE 910
C	INITIALIZE INDICATORS AND COMPUTE THRESHOLD, THR	EICE 920
C		EICE 930
	IND=0	EICE 940
	THR=ANORM	EICE 950
45	THR=THR/FLOAT(N)	EICE 960
50	L=1	EICE 970
55	M=L+1	EICE 980
C		EICE 990
C	COMPUTE SIN AND COS	EICE1000
C		EICE1010
60	MQ=(M*M-M)/2	EICE1020
	LQ=(L*L-L)/2	EICE1030
	LM=L+MQ	EICE1040
62	IF(ABS(A(LM))-THR) 130,65,65	EICE1050
65	IND=1	EICE1060
	LL=L+LQ	EICE1070
	MM=M+MQ	EICE1080
	X=0.5*(A(LL)-A(MM))	EICE1090
68	Y=-A(LM)/SQRT(A(LM)*A(LM)+X*X)	EICE1100
	IF(X) 70,75,75	EICE1110
70	Y=-Y	EICE1120
75	SINX=Y/SQRT(2.0*(1.0+(SORT(1.0)-Y*Y)))	EICE1130
	SINX2=SINX*SINX	EICE1140
78	COSX=SQRT(1.0-SINX2)	EICE1150
	COSX2=COSX*COSX	EICE1160

SINCS =SINX*COSX

ROTATE L AND M COLUMNS

```

      ILQ=N*(L-1)
      IMQ=N*(M-1)
      DO 125 I=1,N
      IQ=(I*I-1)/2
      IF(I-L) 80,115,80
80    IF(I-M) 85,115,90
85    IM=I+MQ
      GU TO 95
90    IM=M+IQ
95    IF(I-L) 100,105,105
100   IL=I+LQ
      GU TO 110
105   IL=L+IQ
110   X=A(IL)*COSX-A(IM)*SINX
      A(IM)=A(IL)*SINX+A(IM)*COSX
      A(IL)=X
115   IF(MV-1) 120,125,120
120   ILR=ILQ+I
      IMR=IMQ+I
      X=R(ILR)*COSX-R(IMR)*SINX
      R(IMR)=R(ILR)*SINX+R(IMR)*COSX
      R(ILR)=X
125   CONTINUE
      A=2.0*A(LM)*SINCS
      Y=A(LL)*COSX2+A(MM)*SINX2-X
      X=A(LL)*SINX2+A(MM)*COSX2+X
      A(LM)=(A(LL)-A(MM))*SINCS+A(LM)*(COSX2-SINX2)
      A(LL)=Y
      A(MM)=X

```

TESTS FOR COMPLETION

TEST FOR M = LAST COLUMN

```

130   IF(M-N) 135,140,135
135   M=M+1
      GU TO 60

```

TEST FOR L = SECOND FROM LAST COLUMN

```

140   IF(L-(N-1)) 145,150,145
145   L=L+1
      GU TO 55
150   IF(IND-1) 160,155,160
155   IND=0
      GU TO 50

```

COMPARE THRESHOLD WITH FINAL NORM

```

160   IF(THR-ANR4X) 165,165,45

```

SORT EIGENVALUES AND EIGENVECTORS

```

165   IQ=-N
      DO 185 I=1,N

```

EIGF1170
 EIGF1180
 EIGF1190
 EIGF1200
 EIGF1210
 EIGF1220
 EIGF1230
 EIGF1240
 EIGF1250
 EIGF1260
 EIGF1270
 EIGF1280
 EIGF1290
 EIGF1300
 EIGF1310
 EIGF1320
 EIGF1330
 EIGF1340
 EIGF1350
 EIGF1360
 EIGF1370
 EIGF1380
 EIGF1390
 EIGF1400
 EIGF1410
 EIGF1420
 EIGF1430
 EIGF1440
 EIGF1450
 EIGF1460
 EIGF1470
 EIGF1480
 EIGF1490
 EIGF1500
 EIGF1510
 EIGF1520
 EIGF1530
 EIGF1540
 EIGF1550
 EIGF1560
 EIGF1570
 EIGF1580
 EIGF1590
 EIGF1600
 EIGF1610
 EIGF1620
 EIGF1630
 EIGF1640
 EIGF1650
 EIGF1660
 EIGF1670
 EIGF1680
 EIGF1690
 EIGF1700
 EIGF1710
 EIGF1720
 EIGF1730
 EIGF1740
 EIGF1750


```

      IQ=IQ+N
      LL=I+(I*I-I)/2
      JQ=I*(I-2)
      DO 185 J=I,4
      JQ=JQ+N
      MM=J+(J*J-J)/2
      IF(A(LL)-A(MM)) 170,185,185
170  X=A(LL)
      A(LL)=A(MM)
      A(MM)=X
      IF(MV-1) 175,185,175
175  DO 180 K=1,N
      ILR=IQ+K
      IMR=JQ+K
      X=R(ILR)
      R(ILR)=R(IMR)
180  R(IMR)=X
185  CONTINUE
      RETURN
      END

```

```

EIGF1760
EIGF1770
EIGF1780
EIGF1790
EIGF1800
EIGF1810
EIGF1820
EIGF1830
EIGF1840
EIGF1850
EIGF1860
EIGF1870
EIGF1880
EIGF1890
EIGF1900
EIGF1910
EIGF1920
EIGF1930
EIGF1940
EIGF1950

```

/*

FÜGGELÉK/C

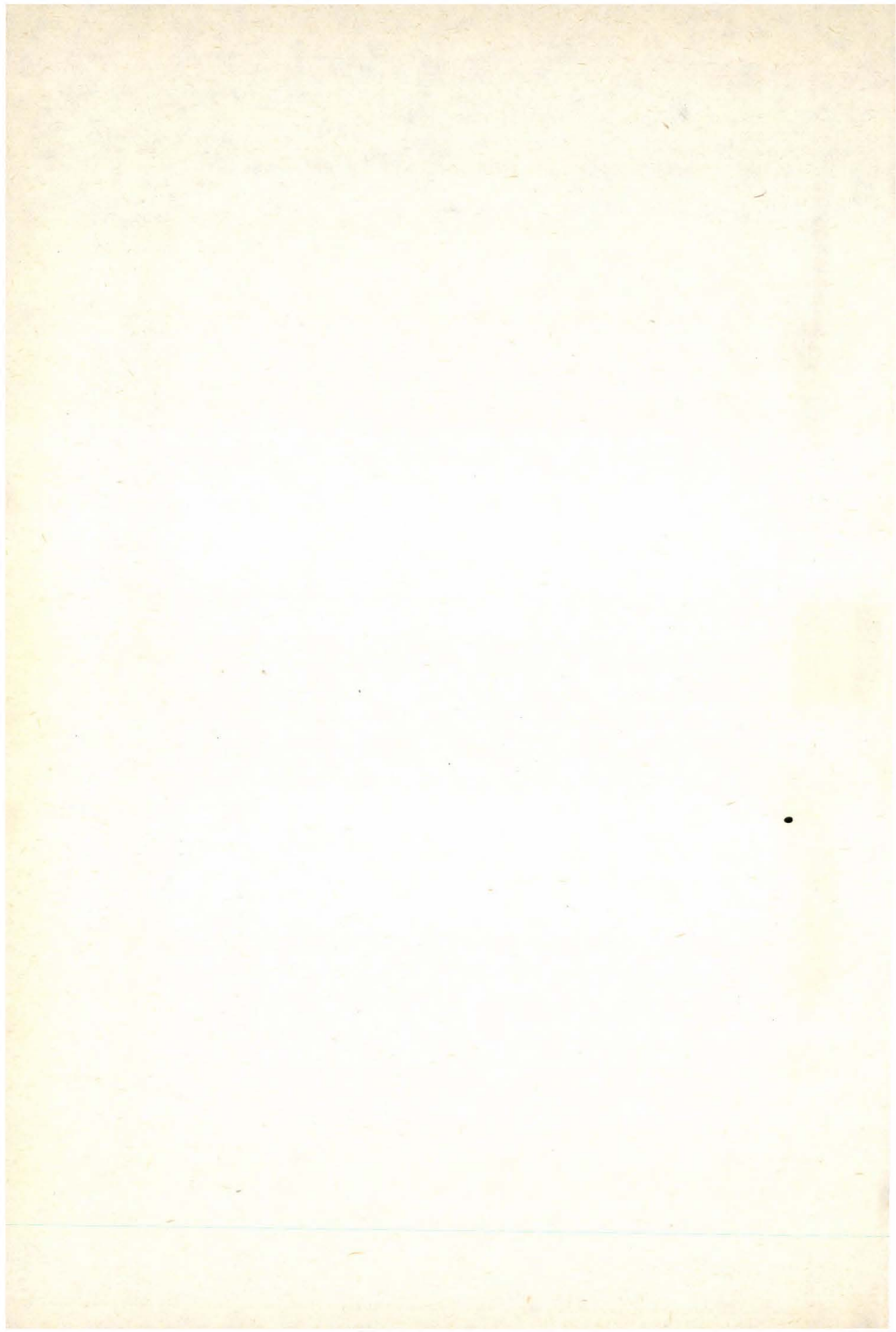
	SUBROUTINE GIV01(A,B,NMAX,NSUB,VALU,MSUB)	F204	3
C	EIGENVALUES AND EIGENVECTORS OF A REAL SYMMETRIC MATRIX	F204	4
C	PROGRAM IS WRITTEN FOR SINGLE PRECISION VARIABLES		
C	SIGNIFICANCE OF USED SYMBOLS		
C	NSUB IS ACTUAL SIZE OF A SQUARE MATRIX		
C	NMAX IS MAXIMAL ALLOWED SIZE OF A INPUT SQUARE MATRIX A		
C	MSUB NUMBER OF REQUIRED EIGENVALUES		
C	IF MSUB>0, PROGRAM WRITES EVEN CORRESPONDING EIGEN VECTORS		
C	IF MSUB<0 PROGRAM COMPUTES ONLY EIGENVALUES (THEREFORE IT IS QUICKER)		
C	A - INPUT MATRIX (NMAX,NSUB)		
C	A - IF EIGENVECTORS ARE TO BE OBTAINED, THEY ARE STORED IN FIRST		
C	MSUB ROWS OF MATRIX A		
C	*****ATTENTION *****		
C	MATRIX A IS DESTROYED IN THE PROCESS OF COMPUTING		
C	MATRIX B(NSUB,NSUB) WORKING SPACE USED FOR THE PURPOSES OF PROGRAM		
C	VEKTOR VALU(MSUB) OUTPUT VEKTOR FOR STORING OF REQUIRED NUMBER MSUB OF		
C	EIGENVALUES; EIGENVALUES ARE STORED IN DESCENDING SEQUENCE		
C	REMARKS: FIRST MSUB ROWS OF A ARE MEANINGFUL ONLY IF MSUB>0 IS CODED		
C	RELATION NMAX>NSUB>MSUB IS VALID WHERE > IS NOT SHARP		
	DIMENSION A(NMAX,NSUB), B(NSUB,NSUB), VALU(MSUB)	F204	5
	DIMENSION QVEC(202),VALU(200),Q(202),U(200),INDEX(200),FACTOR(200)	F204	6
	DIMENSION V(202),T(200,3),DIAG(200),SUPERD(200),HVEC(200)	F204	7
	DIMENSION PVEC(202)	F204	8
	EQUIVALENCE (HVEC,VALU, FACTOR,U),(PVEC,QVEC,Q,V),(TEMP,P)	F204	9
	EQUIVALENCE (T2,ITER),(SUM,MATCH),(DIV,SCALAR,TAU)	F204	10
	DATA E1,MASK1,MASK2,MASK/1.E-6,Z7F000000,Z3E00000,Z7FFFFFFF/		
C	HOUSEHOLDER SIMILARITY TRANSFORMATION TO CO-DIAGONAL FORM	F204	12
	-----	F204	13

C	N=NSUB	F204	14
	M=IABS(MSUB)	F204	15
	IF(N-1) 1000,1000,1	F204	16
1	IF(N-M) 1000,5,5	F204	17
5	IF(MSUB) 50,1000,10	F204	18
C	GENERATE IDENTITY MATRIX FOR SAVING ROTATIONS DURING TRANSFORM	F204	19
10	DO 30 I=2,N	F204	20
	DO 30 J=2,N	F204	21
	B(I,J)=0.	F204	22
	IF(I-J) 30,20,30	F204	23
20	B(I,J)=1.	F204	24
30	CONTINUE	F204	25
50	DO 200 I=1,N	F204	26
	I1=I+1	F204	27
	IF(N-I.LT.2) GO TO 160	F204	28
C	REDUCE I-TH ROW/COLUMN OF MATRIX A	F204	29
	I2=I1+1	F204	30
	SUM=0.0	F204	31
	DO 70 J=I2,N	F204	32
70	SUM=SUM+A(J,I)*A(J,I)	F204	33
	IF (SUM) 75,160,75	F204	34
75	J=I1	F204	35
	TEMP=A(J,I)	F204	36
	SUM=SQR(SUM+TEMP*TEMP)	F204	37
	A(J,I)=-SIGN (SUM, TEMP)	F204	38
	WVEC(J)=SQRT (1.0+ABS (TEMP)/SUM)	F204	39
	DIV=SIGN (WVEC(J)*SUM, TEMP)	F204	40
	DO 85 J=I2,N	F204	41
85	WVEC(J)=A(J,I)/DIV	F204	42
	SCALAR=0.0	F204	43
	DO 95 J=I1,N	F204	44
	PVEC(J)=0.0	F204	45
	DO 90 K=I1,N	F204	46
90	PVEC(J)=PVEC(J)+A(K,J)*WVEC(K)	F204	47
	SCALAR=SCALAR+PVEC(J)*WVEC(J)	F204	48
95	CONTINUE	F204	49
	SCALAR=0.5*SCALAR	F204	50
	DO 120 J=I1,N	F204	51
	QVEC(J)=PVEC(J)-SCALAR*WVEC(J)	F204	52
	DO 120 K=I1,J	F204	53
	A(K,J)=A(K,J)-(WVEC(K)*QVEC(J)+WVEC(J)*QVEC(K))	F204	54
	A(J,K)=A(K,J)	F204	55
120	CONTINUE	F204	56
	IF(MSUB) 160,160,130	F204	57
C	SAVE ROTATION FOR LATER APPLICATION TO CO-DIAGONAL EIGENVECTORS	F204	58
130	DO 150 K=2,N	F204	59
	TEMP=0.0	F204	60
	DO 140 J=I1,N	F204	61

140	TEMP=TEMP+WVEC(J)*B(J,K)	F204	62
	DO 150 J=11,N	F204	63
	B(J,K)=B(J,K)-WVEC(J)*TEMP	F204	64
150	CONTINUE	F204	65
C	SAVE CO-DIAGONAL FORM ELEMENTS FOR EIGENVALUE SOLUTION	F204	66
160	DIAG(I)=A(I,I)	F204	67
	SUPERD(I)=A(I1,I)	F204	68
200	CONTINUE	F204	69
	SUPERD(N-1)=A(N,N-1)	F204	70
	SUPERD(N)=0.	F204	71
C	GIVENS EIGENVALUE ITERATION FROM STURM CHAIN OF CO-DIAGONAL MINORS	F204	72
C	-----	F204	73
C	CALCULATE NORM OF MATRIX AND INITIALIZE EIGENVALUE BOUNDS	F204	74
	ANORM=ABS(DIAG(1))+ABS(SUPERD(1))	F204	75
	DO 245 L=2,N	F204	76
	Q(L-1)=SUPERD(L-1)*SUPERD(L-1)	F204	77
	ANORM2=ABS(DIAG(L))+ABS(SUPERD(L))+ABS(SUPERD(L-1))	F204	78
245	ANORM=AMAX1(ANORM,ANORM2)	F204	79
	DO 240 L=1,M	F204	80
	VALU(L)=ANORM	F204	81
	VALL(L)=-ANORM	F204	82
240	CONTINUE	F204	83
	EPS1=ANORM*E1	F204	84
250	CONTINUE		
1009	DO 570 L=1,M	F204	85
C	CHOOSE NEW TRIAL VALUE WHILE TESTING BOUNDS FOR CONVERGENCE	F204	86
260	TAU=(VALU(L)+VALL(L))/2.0	F204	87
	IF((TAU-VALU(L))*(TAU-VALL(L))) 270,570,270		
C	DETERMINE SIGN CHANGES OF PRINCIPAL MINORS	F204	89
270	MATCH=0	F204	90
	L1=1	F204	91
280	P=DIAG(L1)-TAU	F204	92
290	IF(P.GE.0.) MATCH=MATCH+1	F204	93
	IF(P.EQ.0) GO TO 300	F204	94
	L1=L1+1	F204	95
	IF(L1.GT.N) GO TO 310	F204	96
	IEX1= IAND(MASK1,DIAG(L1)-TAU-Q(L1-1))		
	IEX2= IAND(MASK1,P)		
	IF(IABS(IEX1-IEX2).GE.MASK2) GO TO 295		
	P=DIAG(L1)-TAU-Q(L1-1)/P	F204	97
C	IF P OVERFLOWS PROCEED AS THOUGH P=0	F204	98
	GO TO 290	F204	100
295	MATCH=MATCH+1	F204	101
	L1=L1-1	F204	102
300	L1=L1+2	F204	103
	IF(L1.LE.N) GO TO 280	F204	104
C	ESTABLISH TIGHTER BOUNDS ON EIGENVALUES	F204	105
310	IF(L-MATCH) 330,330,320	F204	106
320	VALU(L)=TAU	F204	107
	GO TO 260	F204	108
330	J=MIN0(MATCH,4)	F204	109
	DO 340 L1=L,J	F204	110
340	VALL(L1)=TAU	F204	111
	GO TO 260	F204	112
570	CONTINUE	F204	113
	IF(MSUB.LT.0) GO TO 1000	F204	114
C	EIGENVECTORS IF CO-DIAGONAL SYMMETRIC MATRIX--INVERSE ITERATION	F204	115
C	-----	F204	116
	DO 970 I=1,M	F204	117

C	CHECK FOR REPEATED EIGENVALUE	F204	118
	IF (I.EQ.1) GO TO 725	F204	119
720	IF (VALU(I-1)-VALU(I)-EPS1) 720, 725, 725	F204	120
725	I1=-1	F204	121
730	I1=I1+1	F204	122
C	TRIANGULARIZE CO-DIAGONAL FORM AFTER EIGENVALUE SUBTRACTION	F204	123
	DO 760 L=1,N	F204	124
	V(L)=EPS1	F204	125
	IF (I1.NE.0) V(L)=RNDM(TEMP)	F204	126
	T(L,2)=DIAG(L)-VALU(I)	F204	127
	IF (L-N) 740, 735, 740	F204	128
735	T(L,3)=0.0	F204	129
	GO TO 760	F204	130
740	T(L,3)=SJPERD(L)	F204	131
	IF (T(L,3)) 750, 745, 750	F204	132
745	T(L,3)=EPS1	F204	133
750	T(L+1,1)=T(L,3)	F204	134
760	CONTINUE	F204	135
765	DO 820 J=1,N	F204	136
	T(J,1)=T(J,2)	F204	137
	T(J,2)=T(J,3)	F204	138
	T(J,3)=0.0	F204	139
	VTEMP=ABS (T(J,1))	F204	140
	IF (J-N) 785, 770, 785	F204	141
770	IF (VTEMP) 820, 780, 820	F204	142
780	T(J,1)=EPS1	F204	143
	GO TO 820	F204	144
785	INDEX(J)=0	F204	145
	IF (ABS (T(J+1,1))-VTEMP) 810, 810, 790	F204	146
790	INDEX(J)=1	F204	147
	DO 800 K=1,3	F204	148
	VTEMP=T(J,K)	F204	149
	T(J,K)=T(J+1,K)	F204	150
	T(J+1,K)=VTEMP	F204	151
800	CONTINUE	F204	152
810	VTEMP =T(J+1,1)/T(J,1)	F204	153
	FACTOR(J)=VTEMP	F204	154
	T(J+1,2)=T(J+1,2)- VTEMP *T(J,2)	F204	155
	T(J+1,3)=T(J+1,3)- VTEMP *T(J,3)	F204	156
820	CONTINUE	F204	157
C	BACK SUBSTITUTE TO OBTAIN EIGENVECTOR	F204	158
830	ITER=1	F204	159
	V(N+1)=0.	F204	160
	V(N+2)=0.	F204	161
	IF (I1) 920, 860, 920	F204	162
860	DO 870 L1=1,N	F204	163
	L=N+1-L1	F204	164
	V(L)=(V(L)-T(L,2)*V(L+1)-T(L,3)*V(L+2))/T(L,1)	F204	165
870	CONTINUE	F204	166
	GO TO (875,919) ,ITER	F204	167
C	PERFORM SECOND ITERATION	F204	168
875	ITER=2	F204	169
880	DO 910 L=2,N	F204	170
	TEMP=INDEX(L-1)	F204	171
	IF (TEMP) 890, 900, 890	F204	172
890	VTEMP=V(L-1)	F204	173
	V(L-1)=V(L)	F204	174
	V(L)=VTEMP	F204	175
900	V(L)=V(L)-FACTOR(L-1)*V(L-1)	F204	176

910	CONTINUE	F204	177
	GO TO 860	F204	178
C	ORTHOGONALIZE VECTOR TO OTHERS ASSOCIATED WITH REPEATED VALUE	F204	179
919	IF (I1) 920, 945, 920	F204	180
920	CONTINUE		
921	DO 940 L1=1, I1	F204	181
	K=I-L1	F204	182
	VTEMP=0.0	F204	183
	DO 930 J=1, N	F204	184
930	VTEMP=VTEMP+A(J,K)*V(J)	F204	185
	DO 940 J=1, N	F204	186
940	V(J)=V(J)-A(J,K)*VTEMP	F204	187
	GO TO (880, 945), ITER	F204	188
C	NORMALIZE VECTOR	F204	189
945	VNORM2=0.0	F204	190
	DO 950 L=1, N	F204	191
950	VNORM2=VNORM2+V(L)*V(L)	F204	192
	VNORM=SQRT (VNORM2)	F204	193
	DO 960 J=1, N	F204	194
960	A(J, I)=V(J)/VNORM	F204	195
970	CONTINUE	F204	196
C	ROTATION OF C-DIAGONAL VECTORS INTO MATRIX EIGENVECTORS	F204	197
C	-----	F204	198
	DO 990 I=1, M	F204	199
	DO 980 K=2, N	F204	200
	U(K)=0.0	F204	201
	DO 980 J=2, N	F204	202
980	U(K)=U(K)+B(J,K)*A(J, I)	F204	203
	DO 990 J=2, N	F204	204
990	A(J, I)=U(J)	F204	205
1000	B(1, 1)=ANORM	F204	206
	RETURN	F204	207
	END	F204	208



FÜGGELÉK /D


```

LN 0001      SUBROUTINE HOW(MVAR,MDIM,NVECT,R,E,V,A,B,C,D)
LN 0002      C
LN 0003      C      MV=ORDER OF THE INPUT MATRIX R
LN 0004      C      MDIM=DIMENSIONED SIZE OF R IN THE MAIN PROGRAM
LN 0005      C      NV=NUMBER OF EIGENVECTORS REQUIRED
LN 0006      C      E=THE VECTOR, IN WHICH THE EIGENVALUES ARE RETURNED
LN 0007      C      V=THE MATRIX, IN THE COLUMNS OF WHICH THE EIGENVECTORS RETURN
LN 0008      C      A,B,C,D=WORKSPACE VECTORS
LN 0009      C
LN 0010      DIMENSION R(1),E(1),V(1),A(1),B(1),C(1),D(1)
LN 0011      EQUIVALENCE (S1,IS1),(S2,IS2)
LN 0012      M=MVAR
LN 0013      MD=MDIM
LN 0014      NV=NVECT
LN 0015      MS=M*M
LN 0016      IF(M-1) 100,97,96
LN 0017      36 M1=M-1
LN 0018      C      TRI-DIAGONALIZE THE MATRIX.
LN 0019      M2=M1*MD+M
LN 0020      M3=M2-MD
LN 0021      M4=MD+1
LN 0022      L=0
LN 0023      PRINT 311
LN 0024      311 FORMAT(* ELEMENTS OF R*)
LN 0025      C      A-BA MENTI AT R DIAGONALISAT
LN 0026      DO 1 I=1,M2,M4
LN 0027      L=L+1
LN 0028      1 A(L)=R(I)
LN 0029      B(1)=0.
LN 0030      IF(M-2) 13,2,3
LN 0031      3 KK=0
LN 0032      DO 15 K=2,M1
LN 0033      KL=KK+K
LN 0034      KU=KK+M
LN 0035      KJ=K+1
LN 0036      SUM=0.
LN 0037      DO 4 J=KL,KU
LN 0038      4 SUM=SUM+R(J)**2
LN 0039      S=SQRT(SUM)
LN 0040      IF ( S .LE.0.000001) GO TO 151
LN 0041      Z=R(KL)
LN 0042      C      B:TRIDIAGONALIS MATRIX DIAGONALIS ALATTI ELEMEI
LN 0043      C      C:TRANSZFORMALO U VEKTOR
LN 0044      B(K)=SIGN(S,-Z)
LN 0045      S=1./S
LN 0046      C(K)=SQRT(ABS(Z)*S+1.)
LN 0047      X=SIGN(S/C(K),Z)
LN 0048      R(KL)=C(K)
LN 0049      DO 5 I=KJ,M
LN 0050      JJ=I+KK
LN 0051      C(I)=X*R(JJ)
LN 0052      C      A TRANSZFORMALO VEKTORT R ALSO FELEBE PAKJA AT

```



```

LN 0053      R(JJ)=C(I)
LN 0054      5 CONTINUE
LN 0055      DO 8 J=K,M
LN 0056      JJ=J+1
LN 0057      D(J)=0.
LN 0058      L=KK+J
LN 0059      DO 6 I=K,J
LN 0060      L=L+MD
LN 0061      6 D(J)=D(J)+R(L)*C(I)
LN 0062      IF(JJ-M) 7,7,9
LN 0063      151 B(K)=0
LN 0064      GO TO 15
LN 0065      7 DO 8 I=JJ,M
LN 0066      L=L+1
LN 0067      8 D(J)=D(J)+R(L)*C(I)
LN 0068      9 X=0.
LN 0069      DO 10 J=K,M
LN 0070      10 X=X+C(J)*D(J)
LN 0071      X=0.5*X
LN 0072      DO 11 I=K,M
LN 0073      11 D(I)=X*C(I)-D(I)
LN 0074      LL=KK
LN 0075      KK=KK+MD
LN 0076      DO 153 I=K,M
LN 0077      LL=LL+MD
LN 0078      DO 153 J=I,M
LN 0079      L=LL+J
LN 0080      C      R ALSO FELEBEN KELETKEZIK A TRANSZFORMALT MATRIX IS. FELSO RESZE
LN 0081      C      BEN MARAD AZ EREDETI MATRIX
LN 0082      R(L)=R(L)+D(I)*C(J)+D(J)*C(I)
LN 0083      153 CONTINUE
LN 0084      15 CONTINUE
LN 0085      PRINT 315, (R(J), J=1,M)
LN 0086      315 FORMAT(5F10.3)
LN 0087      310 FORMAT(13,F10.3)
LN 0088      PRINT 312
LN 0089      312 FORMAT(* ELEMENTS OF D*)
LN 0090      DO 313 J=1,M
LN 0091      313 PRINT 310, (J,D(J))
LN 0092      C      A: A TRIDIAGONALIS MATRIX DIAGONALISA
LN 0093      L=1
LN 0094      DO 12 I=1,M
LN 0095      X=A(I)
LN 0096      A(I)=R(L)
LN 0097      R(L)=X
LN 0098      12 L=L+M4
LN 0099      2 B(M)=R(M3)
LN 0100      PRINT 302
LN 0101      302 FORMAT(* ELEMENTS OF THE TRIDIAGONALISED MATRIX*)
LN 0102      DO 300 I=1,M
LN 0103      300 PRINT 301, (A(I),B(I))
LN 0104      301 FORMAT(2F10.3)

```



```

LN 0105      C      COMPUTE EIGENVALUES.
LN 0106      13 BD=ABS(A(1))
LN 0107      DO 14 I=2,M
LN 0108      14 BD=AMAX1(BD,ABS(A(I))+B(I)**2)
LN 0109      BD=BD+1.
LN 0110      DO 16 I=1,M
LN 0111      A(I)=A(I)/BD
LN 0112      B(I)=B(I)/B I
LN 0113      D(I)=1.
LN 0114      16 E(I)=-1.
LN 0115      DO 37 K=1,M
LN 0116      17 IF((D(K)-E(K))/AMAX1(ABS(D(K)),ABS(E(K)),1.0E-9)-1.0E-6) 37,37.18
LN 0117      18 X=(D(K)+E(K))*0.5
LN 0118      IS2=1
LN 0119      C(1)=A(1)-X
LN 0120      IF (C(1)) 19,20,20
LN 0121      19 IS1=-1
LN 0122      N=0
LN 0123      GO TO 21
LN 0124      20 IS1=1
LN 0125      N=1
LN 0126      21 DO 31 I=2,M
LN 0127      IF (B(I)) 22,26,22
LN 0128      22 IF (B(I-1)) 23,27,23
LN 0129      23 IF(ABS(C(I-1))+ABS(C(I-2))-1.0E-15) 24,25,25
LN 0130      24 C(I-1)=C(I-1)*1.0E15
LN 0131      C(I-2)=C(I-2)*1.0E15
LN 0132      25 C(I)=(A(I)-X)*C(I-1)-B(I)**2*C(I-2)
LN 0133      GO TO 28
LN 0134      26 C(I)=(A(I)-X)*SIGN(1.0,S1)
LN 0135      GO TO 28
LN 0136      27 C(I)=(A(I)-X)*C(I-1)-SIGN(B(I)**2,S2)
LN 0137      28 S2=S1
LN 0138      IF (C(I)) 29,30,29
LN 0139      29 S1=SIGN(S1,C(I))
LN 0140      IF(IS2+IS1) 30,31,30
LN 0141      30 N=N+1
LN 0142      31 CONTINUE
LN 0143      N=M-N
LN 0144      IF (N-K) 34,32,32
LN 0145      32 DO 33 J=K,N
LN 0146      33 D(J)=X
LN 0147      34 N=N+1
LN 0148      IF (M-N) 17,35,35
LN 0149      35 DO 36 J=N,M
LN 0150      IF (X-E(J)) 17,17,36
LN 0151      36 E(J)=X
LN 0152      GO TO 17
LN 0153      37 CONTINUE
LN 0154      DO 38 I=1,M
LN 0155      A(I)=A(I)*BD
LN 0156      B(I)=B(I)*BD

```



```

LN 0157      38 C(I)=(C(I)+E(I))*ED*0.5
LN 0158      M1=M
LN 0159      K=1
LN 0160      39 I=1
LN 0161      40 DO 43 J=1,M1
LN 0162      IF (I-J) 41,43,41
LN 0163      41 IF (C(I)-C(J)) 43,43,42
LN 0164      42 I=J
LN 0165      GO TO 40
LN 0166      43 CONTINUE
LN 0167      E(K)=C(I)
LN 0168      K=K+1
LN 0169      M1=M1-1
LN 0170      IF (I-M1-1) 44,46,46
LN 0171      44 DO 45 M2=1,M1
LN 0172      45 C(M2)=C(M2+1)
LN 0173      46 IF(M1-1) 47,47,39
LN 0174      47 E(K)=C(1)
LN 0175      IF (ISIGN(1,NV)) 79,76,76
LN 0176      76 DO 77 I=1,M
LN 0177      77 C(I)=E(I)
LN 0178      J=M
LN 0179      DO 78 I=1,M
LN 0180      E(I)=C(J)
LN 0181      78 J=J-1
LN 0182      79 CONTINUE
LN 0183      C DECIDE WHETHER TO COMPUTE EIGENVECTORS, AND IF SO, HOW MAN.
LN 0184      IF (NV) 48,59,48
LN 0185      48 KX=IABS(NV)
LN 0186      J=1
LN 0187      DO 98 INV=1,KX
LN 0188      X=A(1)-E(INV)
LN 0189      Y=B(2)
LN 0190      M1=M-1
LN 0191      DO 54 I=1,M1
LN 0192      IJ=J+I-1
LN 0193      IF (ABS(X)-ABS(B(I+1))) 49,51,53
LN 0194      49 C(I)=B(I+1)
LN 0195      D(I)=A(I+1)-E(INV)
LN 0196      V(IJ)=B(I+2)
LN 0197      Z=-X/C(I)
LN 0198      X=Z*D(I)+Y
LN 0199      IF (M1-I) 50,54,50
LN 0200      50 Y=Z*V(IJ)
LN 0201      GO TO 54
LN 0202      51 IF (X) 53,52,53
LN 0203      52 X=1.0E-10
LN 0204      53 C(I)=X
LN 0205      D(I)=Y
LN 0206      V(IJ)=0.
LN 0207      X=A(I+1)-(B(I+1)/X*Y+E(INV))
LN 0208      Y=B(I+2)

```



```
LN 0209      54 CONTINUE
LN 0210      MJ=M+J-1
LN 0211      IF (X) 56,60,56
LN 0212      56 V(MJ)=1./X
LN 0213      57 I=M1
LN 0214      IJ=J+I-1
LN 0215      V(IJ)=(1.-D(I)*V(MJ))/C(I)
LN 0216      X=V(MJ)**2+V(IJ)**2
LN 0217      58 I=I-1
LN 0218      IJ=J+I-1
LN 0219      IF (I) 59,61,59
LN 0220      59 V(IJ)=(1.0-(D(I)*V(IJ+1)+V(IJ)*V(IJ+2)))/C(I)
LN 0221      X=X+V(IJ)**2
LN 0222      GO TO 58
LN 0223      60 V(MJ)=1.0E10
LN 0224      GO TO 57
LN 0225      61 X=SQRT(X)
LN 0226      DO 62 I=1,M
LN 0227      IJ=J+I-1
LN 0228      62 V(IJ)=V(IJ)/X
LN 0229      J1=M1*MD-MC
LN 0230      K=M
LN 0231      GO TO 66
LN 0232      63 K=K-1
LN 0233      J1=J1-MD
LN 0234      Y=0.
LN 0235      DO 64 I=K,M
LN 0236      IJ=J+I-1
LN 0237      L=J1+I
LN 0238      64 Y=Y+V(IJ)*R(L)
LN 0239      DO 65 I=K,M
LN 0240      IJ=J+I-1
LN 0241      L=J1+I
LN 0242      65 V(IJ)=V(IJ)-Y*R(L)
LN 0243      66 IF (J1) 63,67,63
LN 0244      67 NPLUS=0
LN 0245      NMIN=0
LN 0246      DO 70 I=1,M
LN 0247      IJ=J+I-1
LN 0248      IF (V(IJ)) 68,69,69
LN 0249      68 NMIN=NMIN+1
LN 0250      GO TO 70
LN 0251      69 NPLUS=NPLUS+1
LN 0252      70 CONTINUE
LN 0253      IF (NPLUS-NMIN) 71,73,73
LN 0254      71 DO 72 I=1,M
LN 0255      IJ=J+I-1
LN 0256      72 V(IJ)=-V(IJ)
LN 0257      73 CONTINUE
LN 0258      98 J=J+MD
LN 0259      C RESTORE THE INPUT MATRIX.
LN 0260      99 MD1=MD+1
```



```
LN 0261      JJ=MD1
LN 0262      M1=M*MD
LN 0263      DO 75 I=2,M1,MD1
LN 0264      K=I
LN 0265      DO 74 J=JJ,M1,MD
LN 0266      R(K)=R(J)
LN 0267      74 K=K+1
LN 0268      75 JJ=JJ+MD1
LN 0269      GO TO 100
LN 0270      97 E(1)=R(1)
LN 0271      V(1)=1.
LN 0272      100 RETURN
LN 0273      END
```

USASI FORTRAN DIAGNOSTIC RESULTS FOR HOW

NO ERRORS

X,LGO

FÜGGELÉK/E


```

60 **
61      PROCEDURE SVD (M,N,WITHU,WITHV,EPS,TOL,A,Q,U,V);
62      INTEGER M,N;
63      BOOLEAN WITHU,WITHV;
64      REAL EPS,TOL;
65      ARRAY A,Q,U,V;
66
67      BEGIN INTEGER I,J,K,L,L1,ITER;
68      REAL G,F,G,H,S,X,Y,Z;
69      ARRAY E[1:N];
70 **
71      FOR I:=1 STEP 1 UNTIL M DO
72      COMMENT HOUSEHOLDER REDUCTION TO BIDIAGONAL FORM:
73      G:=X:=0;
74      FOR I:=1 STEP 1 UNTIL N DO
75      BEGIN E[I]:=G; S:=0; L:=I+1;
76      FOR J:=I STEP 1 UNTIL M DO S:=S+U[J,I]**2;
77      IF S<TOL THEN G:=0 ELSE
78      BEGIN F:=U[I,I]; G:= IF F<0 THEN Sqrt(S) ELSE -Sqrt(S);
79      H:=F*G-S; U[I,I]:=F-G;
80 **
81      BEGIN S:=0;
82      FOR K:=I STEP 1 UNTIL M DO S:=S+U[K,I]*U[K,I];
83      F:=S/H;
84      FOR K:=I STEP 1 UNTIL M DO U[K,I]:=U[K,I]+F*U[K,I];
85      END J;
86      END S;
87      Q[I,I]:=G; S:=0;
88      FOR J:=L STEP 1 UNTIL N DO S:=S+U[I,J]**2;
89      IF S<TOL THEN G:=0 ELSE
90 **
91      BEGIN F:=U[I,I+1]; G:= IF F<0 THEN Sqrt(S) ELSE -Sqrt(S);
92      H:=F*G-S; U[I,I+1]:=F-G;
93      FOR J:=L STEP 1 UNTIL N DO U[I,J]:=U[I,J]/H;
94      FOR J:=L STEP 1 UNTIL M DO
95      BEGIN S:=0;
96      FOR K:=L STEP 1 UNTIL N DO S:=S+U[J,K]*U[J,K];
97      FOR K:=L STEP 1 UNTIL N DO U[J,K]:=U[J,K]+S*E[K];
98      END J;
99      END S;
100 **
101      END I;
102      COMMENT ACCUMULATION OF RIGHT-HAND TRANSFORMATIONS:
103      IF WITHV THEN FOR I:=N STEP -1 UNTIL 1 DO
104      BEGIN IF G NE 0 THEN
105      BEGIN H:=U[I,I+1]*G;
106      FOR J:=L STEP 1 UNTIL N DO V[J,I]:=U[J,I]/H;
107      FOR J:=L STEP 1 UNTIL N DO
108      BEGIN S:=0;
109      FOR K:=L STEP 1 UNTIL N DO S:=S+U[J,K]*V[K,I];
110      FOR K:=L STEP 1 UNTIL N DO V[K,I]:=V[K,I]+S*V[K,I];
111 **
112      END J;
113      END G;
114      FOR J:=L STEP 1 UNTIL N DO V[I,I]:=U[I,I]:=1;
115      V[I,I+1]:=H; G:=E[I]; L:=I;
116      END I;
117      COMMENT ACCUMULATION OF LEFT-HAND TRANSFORMATIONS:
118      IF WITHU THEN FOR I:=N+1 STEP 1 UNTIL M DO
119      BEGIN FOR J:=I+1 STEP 1 UNTIL M DO U[I,J]:=0;
120      U[I,I]:=1;
121      END I;

```



```

120** IF WITHU THEN FOR I.=N STEP -1 UNTIL 1 DO E11
121 BEGIN L.=I+1; G.=Q[I];
122 FOR J.=L STEP 1 UNTIL M DO U[I,J].:=0; B12
123 IF G NE 0 THEN
124 BEGIN H.=U[I,I]*G;
125 FOR J.=L STEP 1 UNTIL M DO B13
126 BEGIN S.=0;
127 FOR K.=L STEP 1 UNTIL M DO S.=S+U[K,I]*U[K,J]; B14
128 F.=S/H;
129 FOR K.=I STEP 1 UNTIL M DO U[K,J].:=U[K,J]+F*U[K,I]
130** END J;
131 FOR J.=I STEP 1 UNTIL M DO U[J,I].:=U[J,I]/G; E14
132 END G
133 ELSE FOR J.=I STEP 1 UNTIL M DO U[J,I].:=0; E13
134 U[I,I].:=U[I,I]+1;
135 END I;
136 COMMENT DIAGONALISATION OF THE BIDIAGONAL FORM; E12
137 EPS.=EPS*X;
138 FOR K.=N STEP -1 UNTIL 1 DO
139 BEGIN
140** TEST F SPLITTING: B15
141 ITER:=ITER+1;
142 FOR L.=K STEP -1 UNTIL 1 DO
143 BEGIN IF ABS(E[L])<EPS THEN GO TO TEST F CONVERGENCE;
144 IF ABS(Q[L-1])<EPS THEN GO TO CANCELLATION B16
145 END L;
146 COMMENT CANCELLATION OF E[L] IF L>1; E16
147 CANCELLATION:
148 OUTIMAGE; OUTTEXT(##CANCELLATION##); OUTIMAGE:
149 G.=0; S.=1; L1.=L-1;
150** FOR I.=L STEP 1 UNTIL K DO
151 BEGIN F.=S*E[I]; E[I].:=C*E[I];
152 IF ABS(F)<EPS THEN GO TO TEST F CONVERGENCE; B17
153 G.=Q[I]; H.=Q[I].:=SQRT(F*F+G*G); C.=G/H; S.=-F/H;
154 IF WITHU THEN FOR J.=1 STEP 1 UNTIL M DO
155 BEGIN Y.=U[J,L1]; Z.=U[J,I];
156 U[J,L1].:=Y*C+Z*S; U[J,I].:=-Y*S+Z*C; B18
157 END J;
158 END I; E18
159 TEST F CONVERGENCE: E17
160** Z.=Q[K]; IF L=K THEN GO TO CONVERGENCE:
161 COMMENT SHIFT FROM BOTTOM 2*2 MINOR:
162 X.=Q[L]; Y.=Q[K-1]; G.=E[K-1]; H.=E[K];
163 F.=((Y-Z)*(Y+Z)+(G-H)*(G+H))/(2*H*Y); G.=SQRT(F*F+1);
164 F.=((X-Z)*(X+Z)+H*(Y/(IF F<0 THEN F-G ELSE F+G)-H))/X;
165 COMMENT NEXT QR TRANSFORMATION;
166 C.=S.=1;
167 FOR I.=L+1 STEP 1 UNTIL K DO
168 BEGIN G.=E[I]; Y.=Q[I]; H.=S*G; G.=C*G;
169 E[I-1].:=Z.=SQRT(F*F+H*H); C.=F/Z; S.=H/Z; B19
170** F.=X*C+G*S; G.=-X*S+G*C; H.=Y*S; Y.=Y*C;
171 IF WITHV THEN FOR J.=1 STEP 1 UNTIL N DO
172 BEGIN X.=V[J,I-1]; Z.=V[J,I];
173 V[J,I-1].:=X*C+Z*S; V[J,I].:=-X*S+Z*C; B20
174 END J;
175 Q[I-1].:=Z.=SQRT(F*F+H*H); C.=F/Z; S.=H/Z; E20
176 F.=C*G+S*Y; X.=-S*G+C*Y;
177 IF WITHU THEN FOR J.=1 STEP 1 UNTIL M DO
178 BEGIN Y.=U[J,I-1]; Z.=U[J,I];
179 U[J,I-1].:=Y*C+Z*S; U[J,I].:=-Y*S+Z*C; B21

```



```
180** END J;  
181 END I;  
182 E(L).=0; E(K).=F; Q(K).=X;  
183 GO TO TEST F SPLITTING;  
184 CONVERGENCE:  
185 IF Z<0 THEN  
186 BEGIN COMMENT Q(K) IS MADE NON-NEGATIVE;  
187 Q(K).=-Z;  
188 IF WITHV THEN FOR J.=1 STEP 1 UNTIL N DO V(J,K).=-V(J,K);  
189 END Z;  
190** END K;  
191 END SVD;  
192  
193  
194  
195  
196  
197  
198  
199  
200**  
201  
202  
203  
204  
205  
206  
207  
208  
209  
210**  
211  
212  
213  
214  
215  
216  
217  
218  
219  
220**  
221  
222  
223  
224  
225  
226  
227  
228  
229  
230**  
231  
232  
233  
234  
235  
236  
237  
238  
239
```

E21
E19

B22

E22
E15
E2

FÜGGELÉK/F


```

240**
241
242      PROCEDURE QPPS(M,N,EPS,TOL,A,U,V);
243      INTEGER M,N;
244      REAL EPS,TOL;
245      ARRAY A,U,V;
246      COMMENT A IS THE ORIGINAL M BY N MATRIX
247      Q IS VECTOR OF DIMENSION N CONTAINING THE SINGULAR VALUES
248      U (M BY M MATRIX) CONTAINS THE LEFT-HAND SIDE EIGEN-BASIS OF A
249      IN ITS COLUMNS
250**      V (N BY N MATRIX) CONTAINS THE RIGHTHAND SIDE EIGEN-BASIS OF A
251      IN ITS COLUMNS
252      TOL IS CST FOR BIDIAGONALIZATION
253      EPS IS CONSTANT FOR THE INVESTIGATION OF CONVERGENCE:
254      BEGIN INTEGER I,J,K,L;
255      REAL C,S,X,Y,D,G,F,H;
256      REAL ARRAY COS,SIN,TOS,TIN[2:N],E[1:N];
257      FOR I.=1 STEP 1 UNTIL M DO
258      FOR J.=1 STEP 1 UNTIL N DO U[I,J].:=A[I,J];
259      COMMENT HOUSEHOLDER REDUCTION TO BIDIAGONAL FORM:
260**      G:=X:=0;
261      FOR I.=1 STEP 1 UNTIL N DO
262      BEGIN E[I].:=G; S:=0; L:=I+1;
263      FOR J.=I STEP 1 UNTIL M DO S:=S+U[J,I]**2;
264      IF S<TOL THEN G:=0 ELSE
265      BEGIN F:=U[I,I]; G:= IF F<0 THEN SQRT(S) ELSE -SQRT(S);
266      H:=F*G-S; U[I,I].:=F-G;
267      FOR J.=L STEP 1 UNTIL N DO
268      BEGIN S:=0;
269      FOR K.=1 STEP 1 UNTIL M DO S:=S+U[K,I]*U[K,J];
270**      F:=S/H;
271      FOR K.=I STEP 1 UNTIL M DO U[K,J].:=U[K,J]+F*U[K,I];
272      END J;
273      END S;
274      Q[I].:=G; S:=0;
275      FOR J.=L STEP 1 UNTIL N DO S:=S+U[I,J]**2;
276      IF S<TOL THEN G:=0 ELSE
277      BEGIN F:=U[I,I+1]; G:= IF F<0 THEN SQRT(S) ELSE -SQRT(S);
278      H:=F*G-S; U[I,I+1].:=F-G;
279      FOR J.=L STEP 1 UNTIL N DO E[J].:=U[I,J]/H;
280**      FOR J.=L STEP 1 UNTIL M DO
281      BEGIN S:=0;
282      FOR K.=L STEP 1 UNTIL N DO S:=S+U[J,K]*U[I,K];
283      FOR K.=L STEP 1 UNTIL N DO U[J,K].:=U[J,K]+S*E[K];
284      END J;
285      END S;
286      Y:=ABS(Q[I])+ABS(E[I]); IF Y>X THEN X:=Y;
287      END I;
288      COMMENT ACCUMULATION OF RIGHT-HAND TRANSFORMATIONS:
289      FOR I.=N STEP -1 UNTIL 1 DO
290**      BEGIN IF G NE 0 THEN
291      BEGIN H:=U[I,I+1]*G;
292      FOR J.=L STEP 1 UNTIL N DO V[J,I].:=U[J,I]/H;
293      FOR J.=L STEP 1 UNTIL N DO
294      BEGIN S:=0;
295      FOR K.=L STEP 1 UNTIL N DO S:=S+U[I,K]*V[K,J];
296      FOR K.=L STEP 1 UNTIL N DO V[K,J].:=V[K,J]+S*V[K,I];
297      END J;
298      END G;
299      FOR J.=L STEP 1 UNTIL N DO V[I,J].:=V[J,I].:=0;

```

B23

B24

B25

B26

E26

E25

B27

B28

E28

E27

E24

B29

B30

B31

E31

E30


```

300**      V[I,I]:=1; G:=E[I]; L:=I;
301      END I;
302      COMMENT ACCUMULATION OF LEFT-HAND TRANSFORMATIONS:
303              FOR I:=N+1 STEP 1 UNTIL M DO
304      BEGIN      FOR J:=N+1 STEP 1 UNTIL M DO U[I,J]:=0;
305                  U[I,I]:=1;
306      END I;
307              FOR I:=N STEP -1 UNTIL 1 DO
308      BEGIN      L:=I+1; G:=Q[I];
309                  FOR J=L STEP 1 UNTIL M DO U[I,J]:=0;
310**      IF G NE 0 THEN
311      BEGIN      H:=U[I,I]*G;
312                  FOR J=L STEP 1 UNTIL M DO
313      BEGIN      S:=0;
314                  FOR K=L STEP 1 UNTIL M DO S:=S+U[K,I]*U[K,J];
315                  F:=S/H;
316                  FOR K=L STEP 1 UNTIL M DO U[K,J]:=U[K,J]+F*U[K,I]
317      END J;
318                  FOR J=I STEP 1 UNTIL M DO U[J,I]:=U[J,I]/G;
319      END G
320**      ELSE      FOR J=I STEP 1 UNTIL M DO U[J,I]:=0;
321                  U[I,I]:=U[I,I]+1;
322      END I;
323
324      COMMENT RIGHT-HAND TRANSFORMATIONS;
325      K:=N;
326      N:=K; K:=0;
327      FOR I:=1 STEP 1 UNTIL N DO
328      IF ABS(Q[I]) > EPS THEN
329      BEGIN      K:=K+1; Q[K]:=Q[I]; E[K]:=E[I]; END ;
330**      C:=1;
331      FOR I:=2 STEP 1 UNTIL K DO
332      BEGIN      D:=E[I]/Q[I-1]/C;
333                  C:=SQRT(1/(1+D**2));
334                  COS[I]:=C; SIN[I]:=SIGN(D)*SQRT(1-C**2);
335      END ;
336      FOR J:=1 STEP 1 UNTIL N DO
337      BEGIN      X:=V[J,I];
338                  FOR I:=2 STEP 1 UNTIL K DO
339      BEGIN      C:=COS[I]; S:=SIN[I];
340**      V[J,I-1]:=X*C+V[J,I]*S; Y:=-X*S+V[J,I]*C;
341                  V[J,I]:=Y; X:=Y;
342      END I;
343      END J;
344      COMMENT THE LOWER BIDIAGONAL FORM;
345      C:=1;
346      FOR I:=2 STEP 1 UNTIL K DO
347      BEGIN      D:=Q[I-1]*COS[I] +E[I]*SIN[I];
348                  Q[I-1]:=D;
349                  G:=Q[I]*SIN[I];
350**      E[I]:=G; D:=G/D/C;
351                  C:=SQRT(1/(1+D**2));
352                  TOS[I]:=C; TIN[I]:=SQRT(1-C**2)*SIGN(D);
353                  Q[I]:=Q[I]*COS[I];
354      END I;
355      COMMENT LEFT-HAND TRANSFORMATIONS:
356      FOR J:=1 STEP 1 UNTIL M DO
357      BEGIN      X:=U[J,1];
358                  FOR I:=2 STEP 1 UNTIL K DO
359      BEGIN      C:=TOS[I]; S:=TIN[I];

```

E29

B32

E32

B33

B34

B35

E35

E34

E33

B36 E36

B37

E37

B38

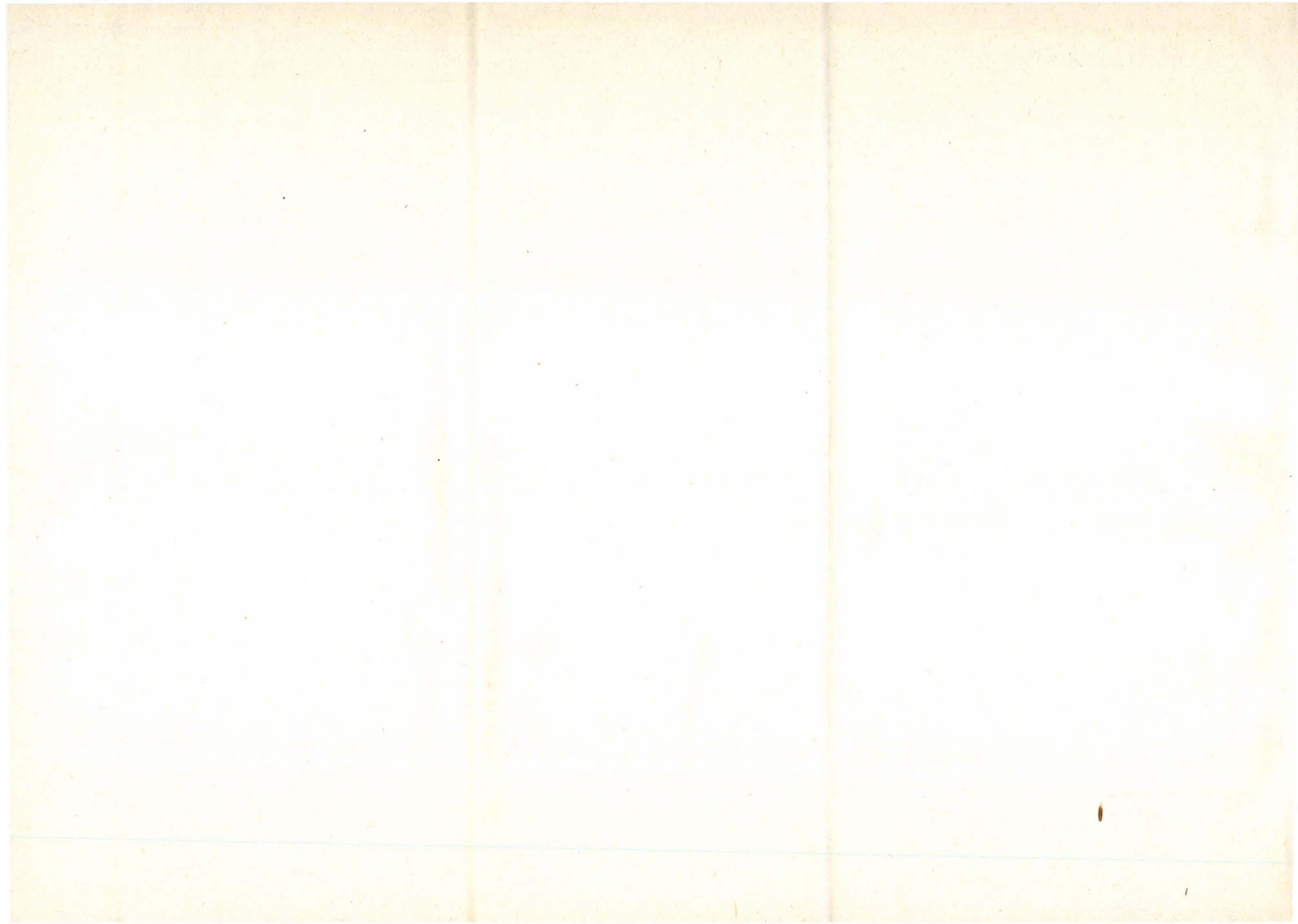
B39

E39

E38

B40

B41




```
360 **          U[J,I-1]:=X*C+U[J,I]*S; Y:=-X*S+U[J,I]*C;          B42
361              U[J,I]:=Y; X:=Y;
362      END I;
363      END J;          E42
364      COMMENT THE NEW UPPER BIDIAGONAL FORM;          E41
365      FOR I:=2 STEP 1 UNTIL K DO
366      BEGIN          Q[I-1]:=Q[I-1]*TOS[I] +E[I]*TIN[I];
367                  E[I]:=Q[I]*TIN[I];          B43
368                  Q[I]:=Q[I]*TOS[I];
369      END I;
370 **      COMMENT TEST OF CONVERGENCE;          E43
371      FOR I:=2 STEP 1 UNTIL K DO
372      IF ABS(E[I]) > EPS THEN GO TO ELEJE;
373      FOR I:=1 STEP 1 UNTIL K DO
374      IF Q[I]<0 THEN
375      BEGIN          Q[I]:=-Q[I];
376                  FOR J:=1 STEP 1 UNTIL N DO V[J,I]:=-V[J,I];          B44
377      END ;
378      END QRPS;          E44
379                  E23
380 **
381
382
383
384
385
386
387
388
389
390 **
391
392
393
394
395
396
397
398
399
400 **
401
402
403
404
405
406
407
408
409
410 **
411
412
413
414
415
416
417
418
419
```


1984-BEN JELENTEK MEG:

- 155/1984 Deák, Hoffer, Mayer, Németh, Potecz, Prékopa, Straziczky: Termikus erőműveken alapuló villamos-energiarendszerek rövidtávu, optimális, erőművi menetrendjének meghatározása hálózati feltételek figyelembevételével.
- 156/1984 Radó Péter: Relációs adatbáziskezelő rendszerek összehasonlító vizsgálata
- 157/1984 Ho Ngoc Luat: A geometriai programozás fejlődései és megoldási módszerei
- 158/1984 PROCEEDINGS of the 3rd International Meeting of Young Computer Scientists.
Edited by: J. Demetrovics and J. Kelemen
- 159/1984 Bertók Péter: A system for monitoring the machining operation in automatic manufacturing systems
- 160/1984 Ratkó István: Válogatott számítástechnikai és matematikai módszerek orvosi alkalmazása
- 161/1984 Hannák László: Többértékű logikák szerkezetéről.
- 162/1984 Kocsis J. - Fetyiszov V.: Rugalmas automatizált rendszerek: megbízhatóság és irányítási problémák
- 163/1984 Kalavszky Dezső: Meleghengerművi villamos hurokemelő hajtás vizsgálata
- 164/1984 Knuth Előd: Specifikációs adatbázis modellek
- 165/1984 Petróczy Judit: Publikációk 1983

1985-BEN EDDIG MEGJELENTEK:

- 166/1985 Radó Péter: Információs rendszerek számítógépes tervezése
- 167/1985 Studies in Applied Stochastic Programming I.
Szerkesztette: Prékopa András
- 168/1985 Böszörményi László - Kovács László - Martos Balázs
Szabó Miklós: LILIPUTH
- 169/1985 Horváth Mátyás: Alkatrészgyártási folyamatok automatizált tervezése
- 170/1985 Márkus Gábor: Algoritmus mátrix alapu logaritmus kiszámítására kriptográfiai alkalmazásokkal
- 171/1985 Tamás Várady: Integration of free-form surfaces into a volumetric modeller
- 172/1985 Reviczky János: A számítógépes grafika terület-kitöltő algoritmusai
- 173/1985 Kacsukné Bruckner Livia: Mozgáspálya generálás bonyolult geometriájú felületek 2 1/2D-s NC megmunkálásához



1085 DEC 27